DIE BRESLAUER SCHULE DER GEOMETRIE (II)

Hans-Joachim Girlich (Leipzig)

Das besondere Interesse an der Geometrie unter den Mathematikern in Deutschland ging im letzten Quartal des 19. Jahrhunderts verloren. Die Entwicklung algebraischer Strukturen brachte allerdings auch der Geometrie neue Impulse, die von Breslauer Absolventen mitgeprägt worden sind. Der nun vorliegende 2. Teil der Breslauer Schule der Geometrie[1] reflektiert die Lage und verrät die Herkunft der Akteure.

11. DER KÖNIG DER INVARIANTENTHEORIE

Im Jahre 1860 stellte Joachimsthal an der Philosophischen Fakultät der Breslauer Universität eine Preisfrage über geodätische Linien. Den Preis errang im August 1861 Paul G o r d a n (1837-1912), ein gebürtiger Breslauer, der seit 1857 fünf Semester in seiner Vaterstadt bei Joachimsthal, Schröter und Galle, drei Semester in Königsberg bei Richelot und Rosenhain studiert hatte, sowie ein Semester bei Kronecker in Berlin hörte und mit seiner bearbeiteten Breslauer Preisschrift hier am 1.3. 1862 promovierte[2].

Alfred C l e b s c h (1833-1872) holte Gordan 1863 an die Universität von Giessen, wo dieser sich habilitierte. In seiner Habilitationsschrift[3] verwendete er, wie sein Lehrer Schröter, die Zerlegung der θ-Reihe in eine endliche Summe von Teilreihen.[4] Die enge Zusammenarbeit von Clebsch und Gordan in Forschung und Lehre mündete in einer gemeinsam geschaffenen Monographie[5] über Abelsche Integrale, die im Zusammenhang zu ebenen Kurven höherer Ordnung stehen. Gordan wandte sich danach der Invariantentheorie algebraischer Formen zu. Er zeichnete sich dabei insbesondere durch die Konstruktion komplizierter Algorithmen aus. Dazu nutzte er den von Aronhold und Clebsch geschaffenen symbolischen Kalkül zur Charakterisierung binärer und ternärer Formen und ihrer Invarianten. Seine weitreichenden Resultate, insbesondere über die Endlichkeit des Formensystems, flossen alsbald in mehrere Lehrbücher ein[6]. Gordans Vorlesungen in Erlangen, wo er von 1875 bis 1910 als Ordinarius der Mathematik fungierte, liess er von einem postgradualen Hörer herausgeben[7], der bei Felix Klein und Alexander Brill in München ausgebildet, als Gymnasiallehrer in Nürnberg in das unweit gelegene Erlangen gelangte.

Gordan betreute nur einen einzigen Promovenden, Emmy Noether, immerhin die bedeutendste Mathematikerin des 20. Jahrhunderts.

---

1 H.-J. Girlich: *Die Breslauer Schule der Geometrie (I)*, Univ. Leipzig, Mathematisches Institut, Preprint 01/2017.

2 P. Gordan: *De linea geodetica,* Dissertation, Univ. Berlin 1862.

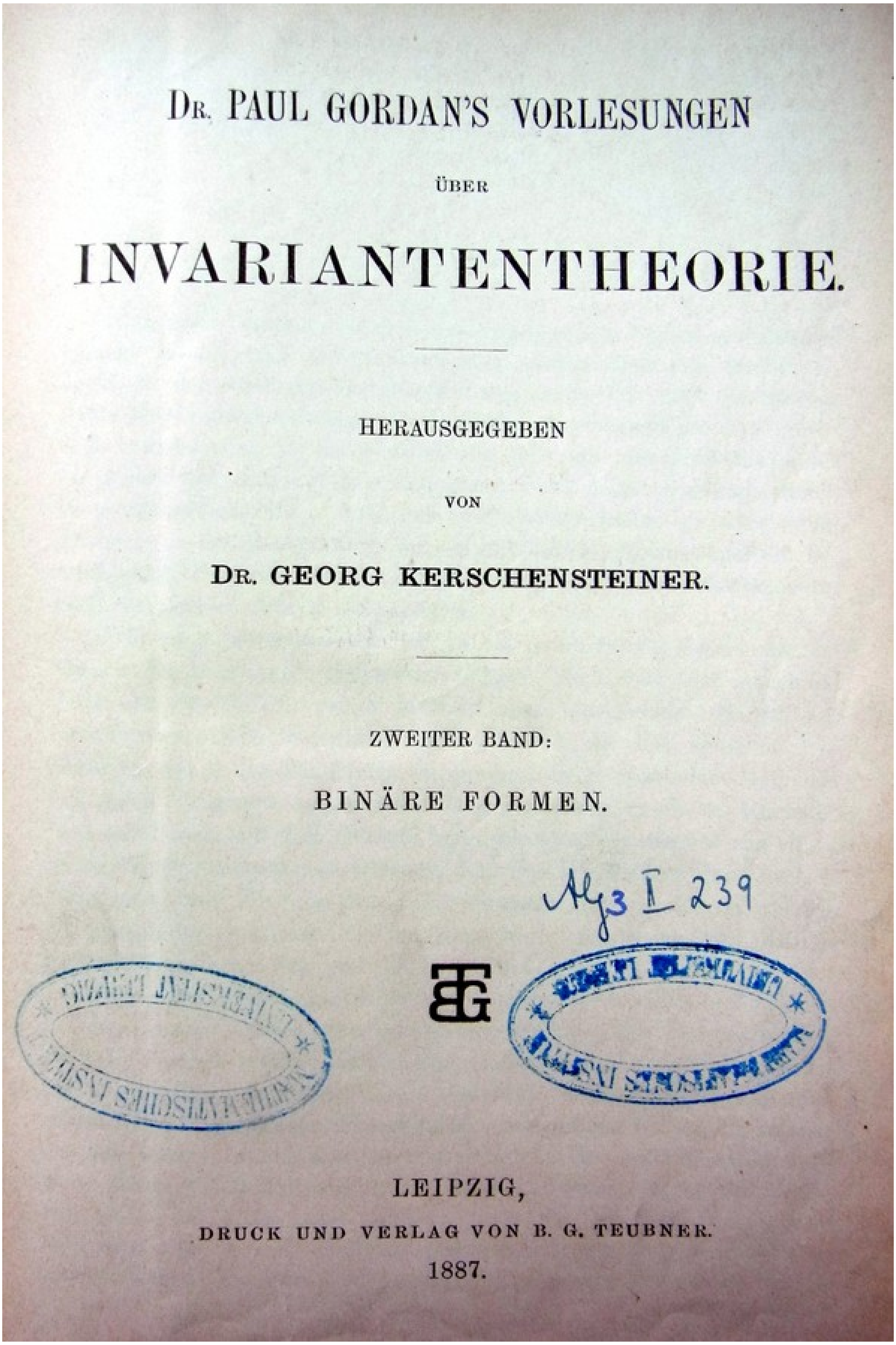
3 P. Gordan: *Über die Transformation der θ-Functionen*, Habilitationsschrift, Univ. Giessen 1863.

4 M. Noether: *Paul Gordan,* Mathematische Annalen 75 (1914), S. 1-41.

5 A. Clebsch und P. Gordan: *Theorie der Abelschen Functionen,* B.G. Teubner, Leipzig 1866.

6 A. Clebsch: *Theorie der binären algebraischen Formen,* B.G. Teubner, Leipzig 1872. F. Lindemann: *Vorlesungen über Geometrie,*1. Band, Leipzig 1876, 2. Band, Leipzig 1891. F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder,* 1884.

7 G. Kerschensteiner (Hg.): *Dr. Paul Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie,* Bd. 1:1885, Bd. 2: 1887.



Dr. PAUL GORDAN'S VORLESUNGEN

ÜBER

INVARIANTENTHEORIE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. GEORG KERSCHENSTEINER.

ZWEITER BAND:

BINÄRE FORMEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

Abb. 8: Der zweite Band von Gordans Vorlesungen.

12. ALGEBRAISCH-GEOMETRISCHE STUDIEN

Kegelschnittbüschel und das Kegelschnittnetz wurden in dem Steiner-Schröter-Werk *Theorie der Kegelschnitte* (1866) behandelt. Auch später benutzte Schröter die synthetische Methode beim Übergang von einem Kegelschnittgewebe zu einem Kegelschnittnetz[8]. Die von Clebsch beförderte neue Algebra für die Geometrie wurde in Breslau erstmalig von Rosanes in der Arbeit *Ueber Systeme von Kegelschnitten*[9] genutzt. Hierbei schließt er unmittelbar an eine Arbeit von Gordan an, die dieser exemplarisch empfiehlt für die Behandlung geometrischer Probleme und die damit verbundenen algebraischen Gleichungen:

„ich beabsichtigte, an dem Beispiel des Pentaeders im Zusammenhange die Methoden darzulegen, welche die Algebra allmälig zur Behandlung derartiger Probleme entwickelt hat.“[10]

Gordan führte die Bestimmung der Ebenen des Pentaeders auf Gleichungen fünften Grades zurück. Gordan folgend untersuchte Felix Klein das Ikosaeder und dafür Gleichungen siebenten Grades (vgl. Fußnote 6).
Einige Schüler von Rosanes, der 1876 in Breslau zum Ordinarius avancierte, promovierten mit entsprechenden Dissertationen: Emil Toeplitz (1876), Georg Landsberg (1890), Otto Toeplitz (1905) und Ernst Hellinger (1907)[11]. Nach weiterführenden Studien bei Hilbert in Göttingen wirkten die letzteren als ordentliche Professoren der Mathematik an den Universitäten von Kiel und Bonn sowie Frankfurt am Main[12]. Nur G. L a n d s b e r g, 1865 in Breslau geboren, kehrte für wenige Semester an seine Heimatuniversität zurück. Er las im Wintersemester 1905/06 als Extraordinarius „Einleitung in die Theorie der algebraischen Funktionen“ wohl nach der mit Hensel verfassten *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendungen auf algebraische Kurven und abelsche Integrale*[13], in der insbesondere seine bedeutenden eigenen Forschungsergebnisse zum Riemann-Rochschen Satz verarbeitet sind. Da das dritte Breslauer Mathematik-Ordinariat bereits 1905 an den Analytiker Adolf Kneser (1862-1930) vergeben wurde, folgte Landsberg 1906 einem Ruf nach Kiel.

Der mathematische Gehalt dieser algebraisch-geometrischen Studien lässt sich hier nicht in aller Kürze dem Außenstehenden nahe bringen. Dafür werden wir im nächsten Abschnitt das Wirken des neben Kummer wohl bedeutendsten Breslauer Mathematiker Steinitz in seinem mathematischen Schaffungsprozess etwas genauer beleuchten.

---

[8] H. Schröter: *Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung,* Mathematische Annalen 5 (1872)

[9] J. Rosanes: *Ueber Systeme von Kegelschnitten,* Mathematische Annalen 6 (1873), S. 264-312.

[10] P. Gordan: *Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung*, Mathematische Annalen 5 (1872), S. 341-377.

[11] E. Toeplitz: *Über ein Flächennetz zweiter Ordnung,* Dissertation, Univ. Breslau 1876; G. Landsberg: *Untersuchungen über die Theorie der Ideale,* Univ. Breslau 1890; O. Toeplitz: *Ueber Systeme von Formen, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet,* Dissertation, Univ. Breslau 1905; E. Hellinger: *Die Orthogonal-invarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen,* Dissertation, Univ. Göttingen 1907.

[12] H.-J. Girlich: *Hausdorff/Toeplitz/Steinhaus – drei bedeutende Mathematiker aus Breslau,* RDS, 7(2016), S. 360-376.

[13] K. Hensel, G. Landsberg: *Theorie der algebraischen Funktionen …,* Leipzig 1902.

13. GEOMETRISCHE KONFIGURATIONEN

Die mathematischen Entdeckungen des 19. Jahrhunderts wurden zusammengefasst in der von Felix Klein und seinen Schülern W.F. Meyer und W. Dyck organisierten 23-bändigen Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Aus der großen Mitarbeiterschar, zu der auch G. Landsberg gehörte[14], ragte der Breslauer Ernst S t e i n i t z (1871-1928) hervor, der gleich zwei Beiträge geliefert hat, die bereits wegbereitend für die Kombinatorik des 20. Jahrhunderts sind. Wir wenden uns zunächst dem Artikel *Konfigurationen der projektiven Geometrie*[15] zu, wobei wir den Steinitzschen Begriffsapparat übernehmen dagegen aus seinem detaillierten Schrifttum nur Breslauer Arbeiten in Fußnoten gesondert ausweisen.

Eine Gruppierung von Punkten und Geraden in der Ebene wird (**ebene**) **Konfiguration** genannt, wenn jeder Punkt auf gleich vielen Geraden liegt und auf jeder Geraden gleich viele Punkte liegen. Ist n die Anzahl der Punkte gleich der Anzahl der Geraden und ist die Anzahl der Inzidenzen für jeden Punkt und jede Gerade gleich k, so wird eine derartige Konfiguration mit dem Symbol n_k bezeichnet. Eine der ältesten Konfigurationen ist die Pascal'sche Konfiguration 9_3. Sie besteht aus

„einem Pascal'schen Sechseck, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen, diesen beiden Geraden, den drei Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten des Sechsecks und der Pascal'schen Geraden, welche die drei Schnittpunkte verbindet“[16].

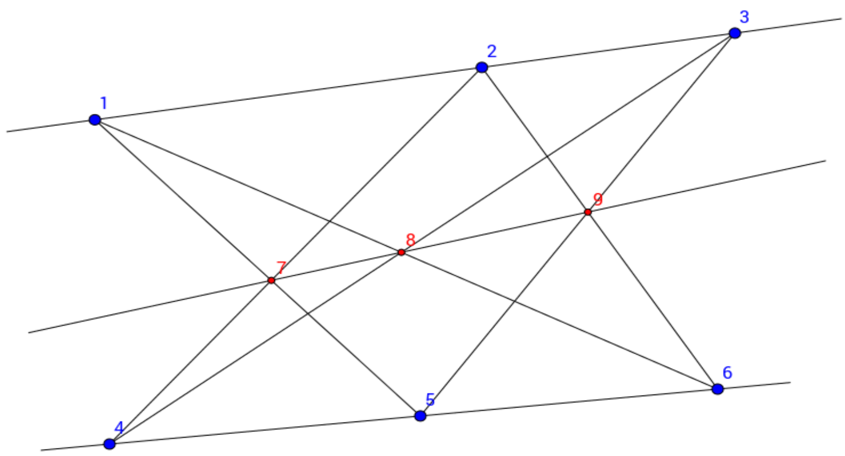


Abb. 9: Die Pascal'sche Konfiguration.

[14] G. Landsberg: *Algebraische Gebilde, Arithmetische Theorie algebraischer Größen,* Encykl. math. Wiss. IB1c

[15] E. Steinitz: *Konfigurationen der projektiven Geometrie,* Encykl.math.Wiss., IIIAB5a., S.484-516, (April 1910 abg.)

[16] Vgl. Fußnote 13, S. 484.

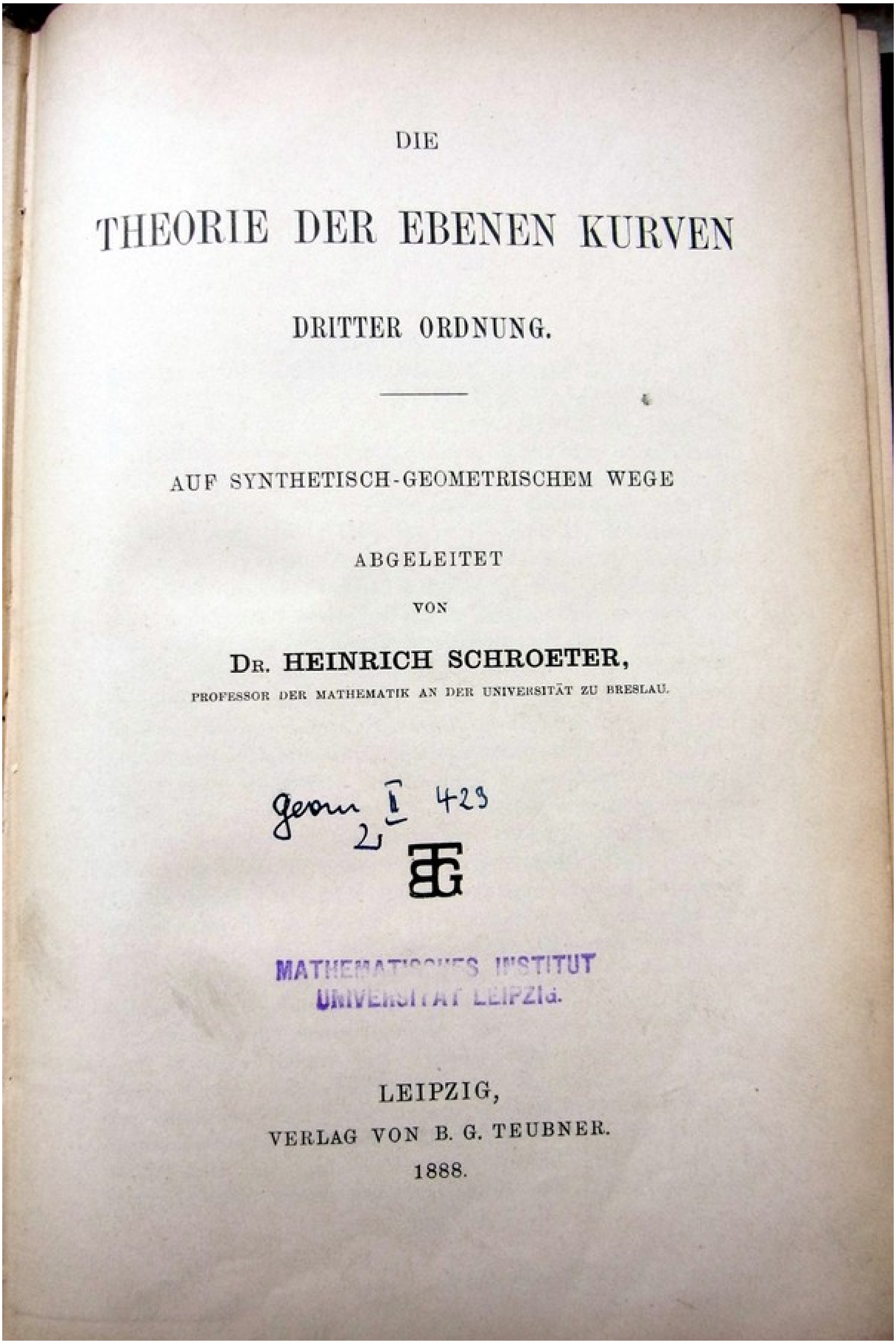
Diese geometrische Konfiguration wird durch die Angabe 9_3 nicht ausreichend charakterisiert, da es davon noch zwei weitere gibt. Dazu kann aber folgende schematische Konfiguration dienen, worin jede Spalte durch die inzidenten Punkte
1
eine Gerade der Konfiguration beschreibt:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Zu vorgegebenen n_k kann man analog auf verschiedene Weise mit den n Elementen n Spalten mit jeweils k verschiedenen Elementen bilden, wobei jedes Element in genau k Spalten auftritt. Nach Aufstellung aller möglichen schematischen Konfigurationen muss noch untersucht werden, welche davon sich geometrisch realisieren lässt.
Das Pascalsche Sechseck wurde von H. Schröter 1870 auf perspektivische Eigenschaften geprüft[17]. Kurz danach widmete sich Schröter den Konfigurationen n_3 in Anschluß an Untersuchungen von S. Kantor. Dieser hatte das vollständige System der 10 Konfigurationen 10_3 angegeben. Schröter konnte zeigen, dass von den 10 wohl kombinatorisch zulässigen Konfigurationen 10_3 nur 9 geometrisch konstruierbar sind[18]. Dabei steht die Frage nach geeigneten Konstruktionsmethoden für Konfigurationen n_k im Raum. Schröter entwickelte hierfür eine Methode, die sich auf Eigenschaften von Kurven 3. Ordnung stützt, die er auch in seiner Monographie *Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* diskutierte[19]. Hieran schließt sich die Dissertation von Steinitz *Über die Construction der Configurationen n_3* an.

Ernst Steinitz hatte 1890 die Reifeprüfung am Friedrich-Gymnasium in Breslau abgelegt. Anschließend Mathematik und Physik bei Schröter, Rosanes und Meyer, sowie in Berlin bei Frobenius, Kronecker und Planck ebenfalls vier Semester studiert. Nach dem Tode von Schröter schloss er sich Jakob Rosanes an, unter dessen Ägide er am 17. März 1894 im Musiksaal der Breslauer Universität seine Dissertation erfolgreich verteidigte. Darin lieferte er eine richtungsweisende kombinatorische Behandlung der Klasse von Konfigurationen n_3, indem er zunächst zeigte, dass jede schematische Konfiguration durch Vertauschung der Elemente innerhalb der Spalten eine Form gewinnt, bei der jede Horizontalreihe jedes der Elemente genau einmal enthält. Wird nun eine Horizontalreihe gestrichen, so reduziert sich jede Spalte auf die Endpunkte einer Strecke, die nun zu Polygonen zusammengesetzt werden können. Auf dieser Grundlage entwickelt Steinitz eine Konstruktionsmethode für n_3, die durch eine Anzahl linearer und einer einzigen quadratischen Operation geleistet wird. Anschließend gibt er Verfahren an, mit denen bei den meisten Konfigurationen n_3 bereits eine lineare Konstruktion möglich ist.

[17] H. Schröter: *Perspectivisch liegende Dreiecke,* Mathematische Annalen 2(1870), S.
[18] H. Schröter: *Ueber die Bildungsweise ...,* Göttinger Nachrichten 1889, S. 193.
[19] H. Schröter: *Ueber lineare Constructionen ...,* Göttinger Nachrichten 1888, S. 237-252.
H. Schröter: *Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung,* B.G. Teubner, Leipzig 1888.



DIE

THEORIE DER EBENEN KURVEN

DRITTER ORDNUNG.

AUF SYNTHETISCH-GEOMETRISCHEM WEGE

ABGELEITET

VON

DR. HEINRICH SCHROETER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Abb. 10: Schröters Spätwerk.

Wir fahren mit der Steinitzschen Darstellung der Konfigurationen im Encyklopädie-Bericht fort. Unter einer **räumlichen Konfiguration** $(A_b^c, B_a^\gamma, C_a^\beta)$ wird verstanden eine Gruppierung von A Punkten, B Geraden, C Ebenen des projektiven Raumes R^3, bei welcher jeder Punkt mit b Geraden und c Ebenen, jede Gerade mit a Punkten und γ Ebenen, jede Ebene mit a Punkten und β Geraden inzident ist.
Ein Beispiel liefert die **Reye'sche Konfiguration** $(12_4^6, 16_3^3, 12_6^4)$, die 1882 von Theodor Reye untersucht worden ist. Steinitz hat hierzu die Regelmäßigkeit und die Reziprozität gezeigt[20]. Durch Projektion der Punkte und Geraden der Reye'schen Konfiguration wird die **Hesse'sche Konfiguration** $(12_4, 16_3)$ erhalten[21].

Aus Breslauer Sicht wollen wir auf den räumlichen Spezialfall A=C=16, B=b=ß=0 und a=c=6 eingehen. Diese Punkte-Ebenen-Konfiguration 16_6 ist eine Gruppierung von 16 Punkten und 16 Ebenen, wobei durch jeden Punkt 6 Ebenen gehen und in jeder Ebene 6 Punkte liegen. Wie Kummer bereits 1864 zeigen konnte, bilden die 16 Doppelpunkte und die 16 singulären Ebenen der Kummer'schen Fläche 4. Ordnung eine später so genannte **Kummer'sche Konfiguration** 16_6. Kummer stellte auch fest, dass die 6 in einer Ebene gelegenen Punkte einem Kegelschnitt angehören und die 6 durch einen Punkt gehenden Ebenen Tangentialebenen eines Kegels 2. Grades sind. H. Weber konnte die 16 singulären Ebenen durch Thetafunktionen beschreiben. Reye begründete die Kummer'schen Konfiguration 1879 synthetisch unter Verwendung eines Nullsystems. Das gelang Schröter 1887 ohne Nullsystem allein mit stereometrischen Hilfsmitteln[22].
Ergänzende Angaben zum Encyklopädie-Artikel insbesondere durch das Ausführen von Beweisen sind in der Arbeit *Über Konfigurationen* zu finden[23].

Während der Studiensemester in Berlin wurde Steinitz durch Kronecker mit algebraischen Methoden vertraut gemacht. Er nutzte diese nach einer Anregung von Heinrich Weber zu seiner berühmten Arbeit *Algebraische Theorie der Körper*[24], in der er den Begriff „Körper“ abstrakt fasst und eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen gibt. Er beweist für jeden Körper K die Existenz eines Erweiterungskörpers L, in dem alle Polynome mit Koeffizienten in K in Linearfaktoren zerlegbar sind. Dieses Werk wurde in Buchform postum von de Gruyter 1930 in Berlin verlegt und von Chelsea 1950 in New York.

---

20 E. Steinitz: *Die Geraden der Reye'schen Configuration,* Arch.f.Math.u.Phys.(3),1,(1901), S. 124.
21 H. Schröter: *Die Hesse'sche Configuration,* Journal f. Math. 108 (1891), S. 269-312.
22 H. Schröter: *Über das Fünfflach ...,* Journal f. Math. 100 (1887), S. 231-257.
23 E. Steinitz: *Über Konfigurationen,* Arch. f. Math. u. Physik (3), 16 (1910), S. 289-313.
24 E. Steinitz: *Algebraische Theorie der Körper,* Journal f. Math. 137 (1910), S. 167-309.

14. KONVEXE POLYEDER

Ein **Polyeder** oder Vielflach ist ein von einer Anzahl ebener Flächenstücke begrenzter Körper. Dieser ist **konvex**, wenn jede Strecke, deren Endpunkte im Körper liegen, ganz dem Körper angehören.Offenbar ist ein Würfel ein konvexes Sechsflach. Ein konvexes Polyeder besteht aus f Flächen, k Kanten (welche die Flächen beranden) und e Ecken (den Endpunkten der Kanten). Bereits Leonhard E u l e r (1707-1783) fand den Zusammenhang, die sogenannte Euler-Gleichung :

$$e + f = k + 2 . \quad (1)$$

Damit ist allerdings noch nicht gesagt, ob es zu beliebig vorgegebenen Anzahlen f und e ein Polyeder gibt.
Eine Lösung wird in der Arbeit *Die Eulerschen Polyederrelationen* gegeben mittels der dort nach Euler hergeleiteten Ungleichungen:

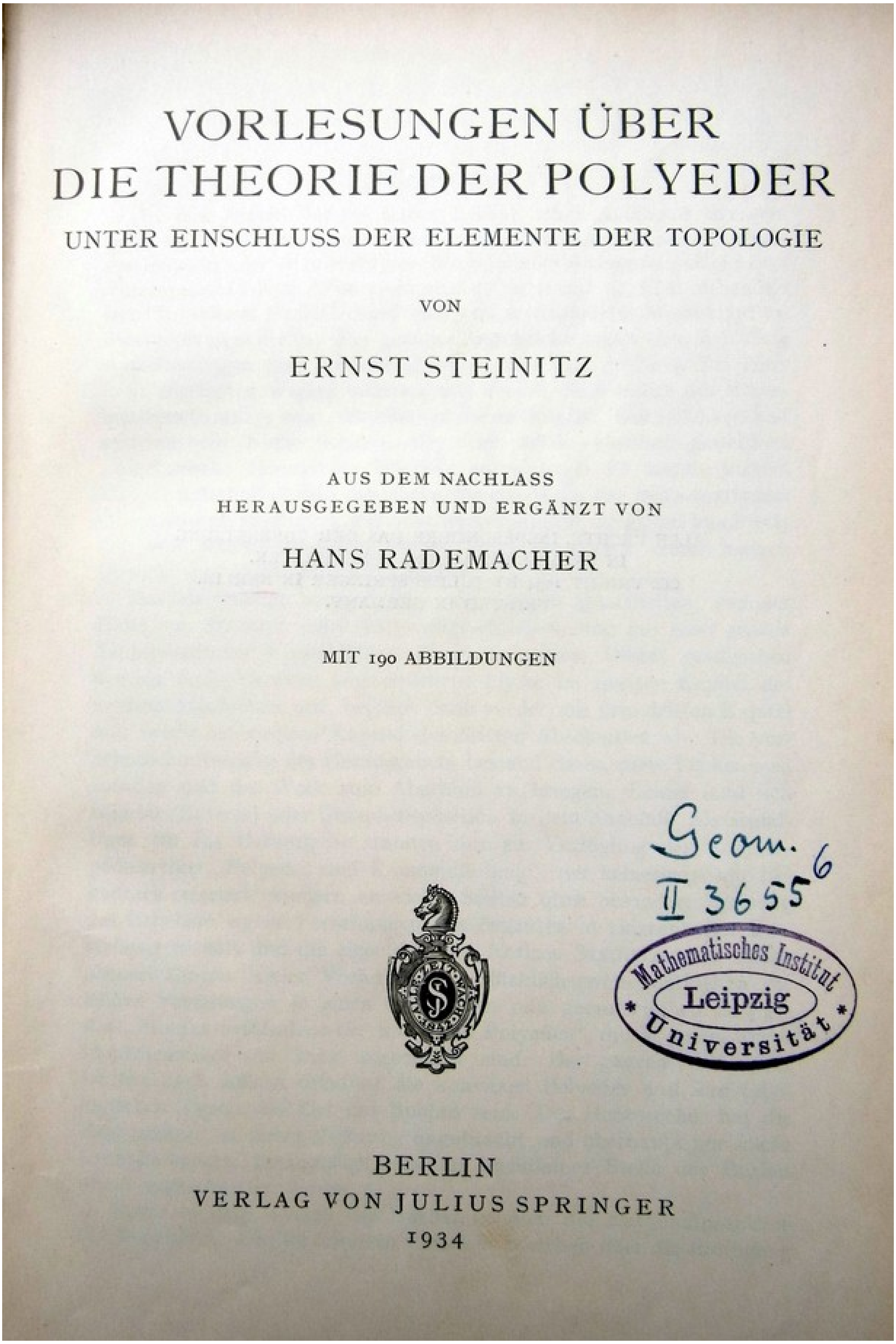
$$3e \leq 2k , \ \ 3f \leq 2k . \quad (2)$$

Satz von Steinitz: Die Gültigkeit der Relationen (1) und (2) ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines konvexen Polyeders mit e Ecken, f Flächen und k Kanten[25].

Steinitz hatte sich 1897 an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg habilitiert und hier bis 1910 als Privatdozent gearbeitet bevor er Professor an der gerade eröffneten TH Breslau wurde. Daneben hielt er an der Universität Breslau Vorlesungen, so im Winter-Semester 1913/14 *Analysis situs und Polyeder* und übernahm die Ausarbeitung des Encyklopädie-Artikels *Polyeder und Raumeinteilungen*, den er 1916 abschloss. Die Behandlung der konvexen Polyeder und ihre topologischen Typen blieb sein Forschungsgebiet lebenslang. Er hatte an der Universität Breslau als ordentlicher Honorarprofessor für das Sommer-Semester 1920 die Vorlesung *Theorie der Polyeder und Elemente der Analysis situs* angekündigt.
Da erhielt Steinitz den Ruf auf eine ordentliche Professur an der Universität Kiel. Er begann dort seine Lehrtätigkeit im Wintersemester 1920/1921 mit einer Vorlesung über die Theorie der Polyeder, die er 1923/1924 weiterführte. Zu seinem Buchprojekt einer allgemeinen Polyeder-Theorie hatte Steinitz schon ein umfangreiches aber noch unvollendetes Manuskript verfasst, als ihm 1928 der Tod ereilte.
Hans R a d e m a c h e r (1892-1969) war 1925 nach Breslau berufen worden, er füllte die vorhandenen Buchlücken aus und gab das letzte große Werk von Steinitz 1934 heraus[26].

---

[25] E. Steinitz: *Die Eulerschen Polyederrelationen,* Archiv Math. Phys. (3) 11(1906), S.8.
[26] E. Steinitz und H. Rademacher: *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder,* Springer, Berlin 1934.



VORLESUNGEN ÜBER
DIE THEORIE DER POLYEDER

UNTER EINSCHLUSS DER ELEMENTE DER TOPOLOGIE

VON

ERNST STEINITZ

AUS DEM NACHLASS
HERAUSGEGEBEN UND ERGÄNZT VON

HANS RADEMACHER

MIT 190 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1934

Abb. 11: Steinitz' Spätwerk.

15. GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

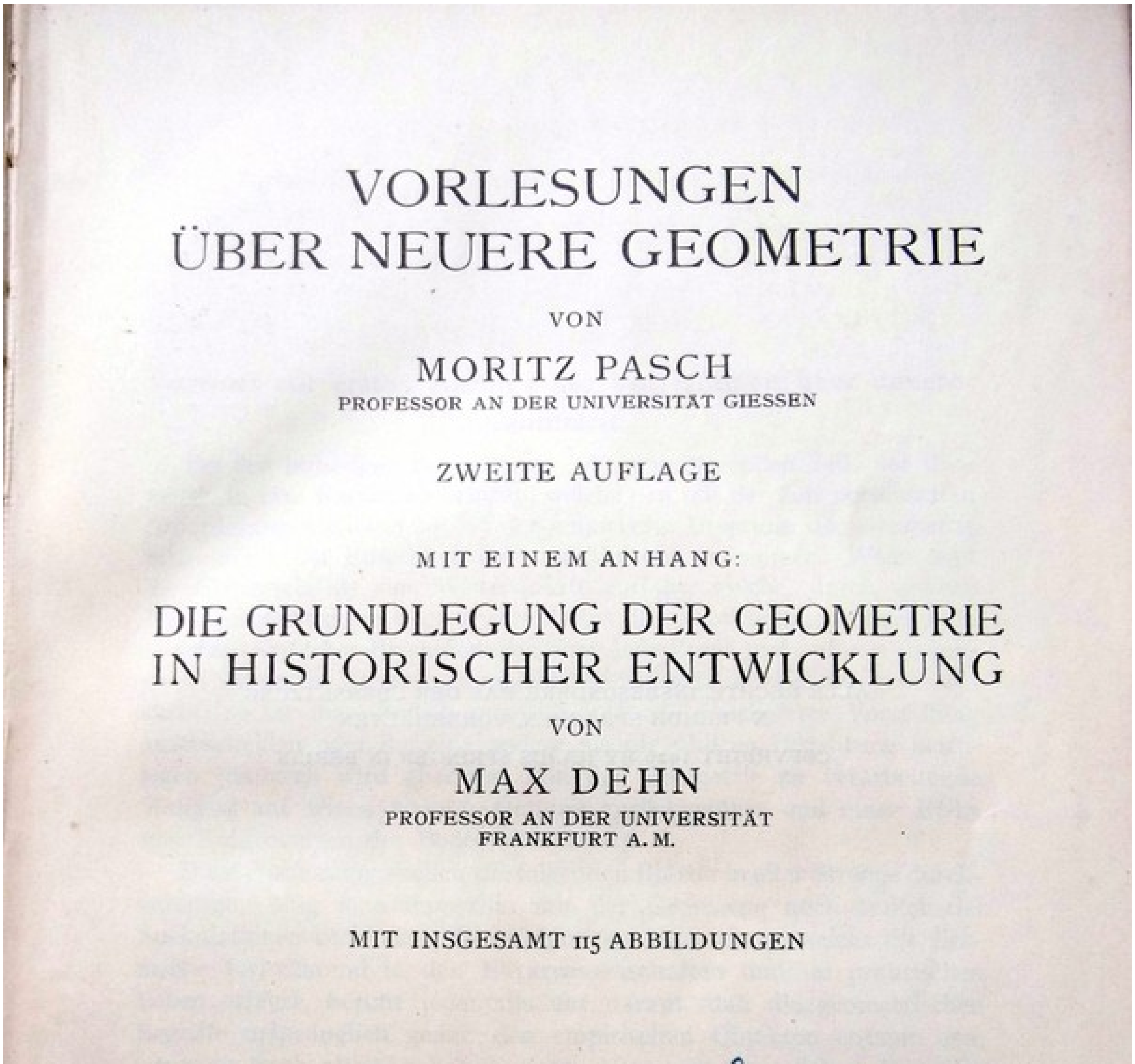
Moritz Paschs postgraduale Studien 1866 in Berlin bei Kummer, Weierstraß und Kronecker legten den Keim zu seinen Arbeiten zu einem axiomatischen Aufbau der Mathematik. Nach seiner Ernennung zum Professor 1873 in Gießen begann Pasch Untersuchungen über die Axiomatisierung der projektiven Geometrie. Hierbei versucht er für die Steiner-Schröter'sche synthetische Geometrie in ihrer Abrundung durch Christian von Staudt „zu einer selbstständigen Wissenschaft …, welche des Messens nicht bedarf.“[27] ein vollständiges Axiomensystem aufzubauen. Begonnen mit Vorlesungen im Wintersemester 1873/74 konnte Pasch mit dem Werk *Vorlesungen über neuere Geometrie*, gedruckt bei B.G. Teubner Leipzig 1882, der mathematischen Öffentlichkeit eine Arbeit vorlegen, die durchaus als Geburtsurkunde der Axiomatisierung der Mathematik gelten kann.

Auf dieser Grundlage bauten Giuseppe Veronese (1854-1917), David Hilbert (1862-1943), Giuseppe Peano (1858-1939) und Friedrich Schur (1856-1932) modifizierte Axiomensysteme auf.
Das System von Pasch besteht aus den projektiven Axiomen der Verknüpfung der Grundgebilde (Punkt, gerade Strecke, ebene Fläche) und der Anordnung der Grundgebilde untereinander sowie den Axiomen der Kongruenz. Die Systeme der Nachfolger von Pasch unterscheiden sich vor allem in den Kongruenzaxiomen.
Bei Veronese wird der Winkel durch ein Strahlenpaar eines Strahlenbüschels definiert.[28] Hilbert führte neben Streckenaxiomen Winkelaxiome ein, wobei er sowohl an Kongruenzaxiome von Pasch als auch von Veronese anknüpft.[29]

Peano[30] und Schur führen die Bewegung als Gruppe kollinearer Transformationen als einen Grundbegriff der Geometrie ein. Damit schließen sie an Felix Kleins Erlanger Programm an. So lässt sich die Kongruenz auf Bewegung zurückführen. Wenn heute in Deutschland hinsichtlich der Axiomatik nur noch von Hilbert und nicht mehr von Pasch gesprochen wird, so ist das wohl der Durchsetzungskraft von Göttingen als dem Zentrum der Mathematik im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts geschuldet.[31]
Friedrich S c h u r bezeichnet sein Buch *Grundlagen der Geometrie* „als eine erneute Bearbeitung der Neueren Geometrie von Pasch“[32]. Es basiert auf dem leicht veränderten Axiomensystem von Peano und diskutiert die Folgerungen auf die metrischen Grundformeln der nichteuklidischen Geometrie, das Parallelenaxiom und das Archimedische Postulat.

---

27 Ch. v. Staudt: *Geometrie der Lage,* Nürnberg 1847,S. III; *Beiträge zur Geometrie der Lage,* Nürnberg 1856-1860.
28 G. Veronese: *Elementi di Geometria,* Verona 1897; vgl. auch *Grundzüge der Geometrie...*übersetzt von A.Schepp.
29 D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie,* Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals, Leipzig 1899; als B.G. Teubner Buch mit Supplementen von Paul Bernays, in der 14. Auflage, Stuttgart, Leipzig 1999.
30 G. Peano: *Fondamenti di Geometria,* Rivista di Matematica 4 (1894), S. 51.
31 D. Tamari: *Moritz Pasch (1843-1930),* Shaker, Aachen 2007.
32 F. Schur: *Grundlagen der Geometrie,* B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1909, S.V.



VORLESUNGEN
ÜBER NEUERE GEOMETRIE

VON

MORITZ PASCH
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN

ZWEITE AUFLAGE

MIT EINEM ANHANG:

DIE GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE
IN HISTORISCHER ENTWICKLUNG

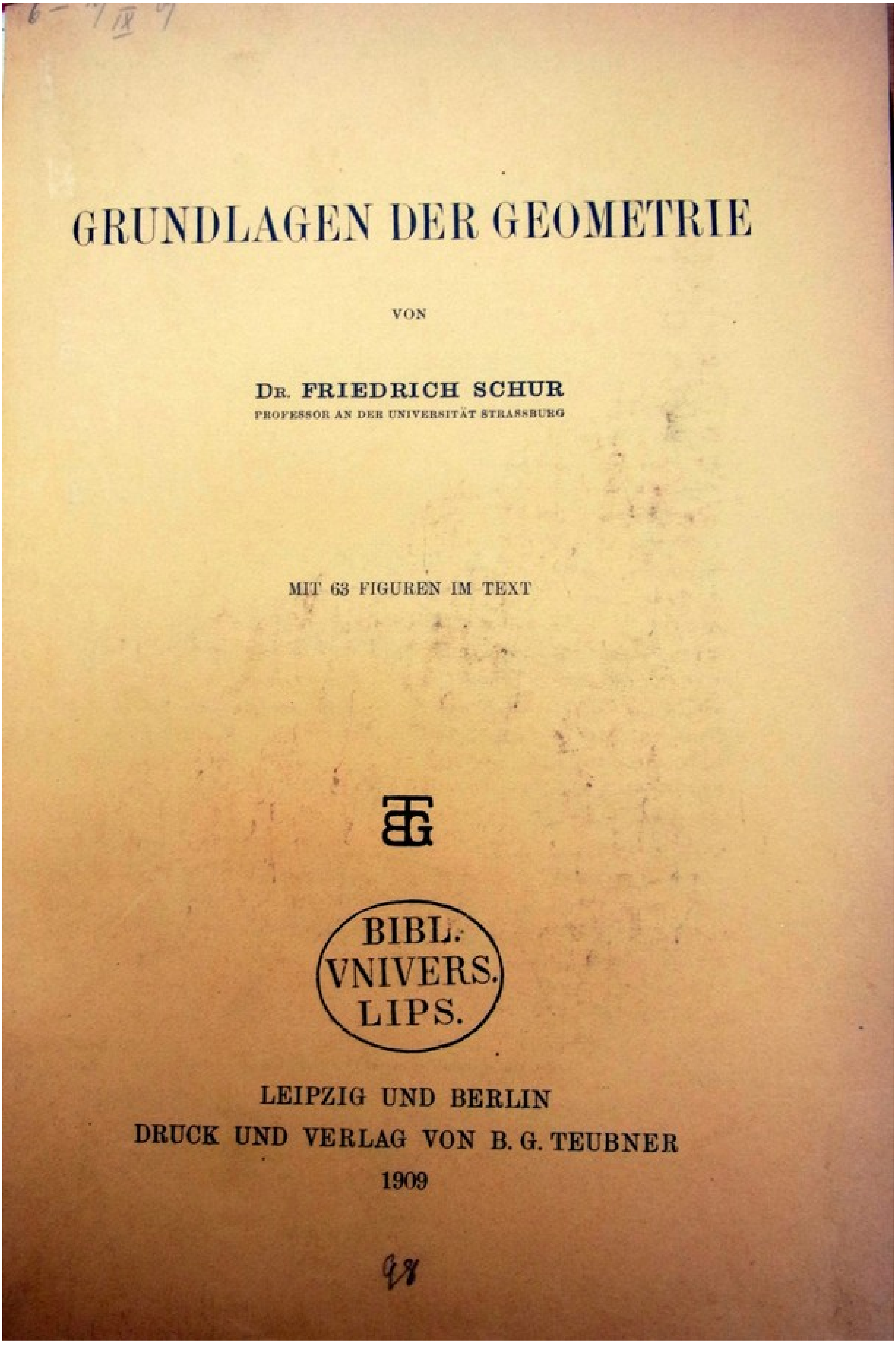
VON

MAX DEHN
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
FRANKFURT A. M.

MIT INSGESAMT 115 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

Abb. 12: Paschs Werk in 2. Auflage mit Dehns Einbettung.



GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. FRIEDRICH SCHUR
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

MIT 63 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Abb. 13: Schurs „Bearbeitung“.

Schur „war ja ganz vorwiegend Geometer, der letzte noch ursprünglich aus der Breslauer Schule hervorgegangene“[33]. Geboren in Maciejewo in der Provinz Posen studierte er von 1875 an drei Semester in Breslau bei Schröter, Rosanes und Meyer und fünf Semester in Berlin bei Kummer, Kronecker, Weierstraß und Kirchhoff Mathematik und Physik. Er promovierte bei Kummer mit *Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe 1. und 2. Grades* im März 1879 und habilitierte sich 1881 *Über die durch kollineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen* in Leipzig, wo er im Mai 1885 ao. Professor wurde mit der Antrittsvorlesung *Die Bedeutung der projektiven Geometrie.* Eine ordentliche Professur erhielt er 1888 in Dorpat, 1892 in Aachen, 1897 in Karlsruhe (Nachfolger von Chr. Wiener) -- hier konnte er sein *Lehrbuch der analytischen Geometrie*[34] abschließen -- , 1909 in Straßburg (Nachfolger von Th. Reye) und nach dem Ersten Weltkrieg 1919 in Breslau als Nachfolger seines alten Lehrers J. Rosanes. Er setzte seine Lehrtätigkeit auf dem Gebiet der Geometrie auch nach der 1924 erfolgten Versetzung in den Ruhestand fort. Im Wintersemester1930/31 las er noch über die Grundlagen der Geometrie und 31/32 über projektiveGeometrie bevor er am 18.3. an einer Lungenentzündung starb.

16. TOPOLOGIE

Die Topologie ist die bisher allgemeinste Stufe der Geometrie. Sie untersucht die Eigenschaften einer Figur oder Punktmenge, die bei eineindeutigen umkehrbar stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Betrachten wir etwa einen konvexen Polyeder wie in Abschnitt 14, so liefern dessen Begrenzungsanzahlen eine Invariante, die **Charakteristik** c = e-k+f dieser Figur. Weitere Invarianten sind die Ränderzahl und die Indikatrix (der Umlaufsinn). Mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten erfordern feinere Invarianten wie die Betti'schen Zahlen und die Torsionskoeffizienten, die gruppentheoretisch erklärt werden.
Methodenmäßig wurde zwischen kombinatorisch-algebraischer und mengen-theoretischer Topologie unterschieden. Vertreter der erstgenannten Richtung waren in Breslau Steinitz (19), Dehn (18) und Nielsen (2), der zweiten Schmidt (12) und Carathéodory (6). Dabei ist in der Klammer die Anzahl der in Breslau lehrmäßig verbrachten Semester angegeben.

Die von Poincaré entwickelte kombinatorische Topologie wurde noch unter den alten Namen *Analysis situs* von Max D e h n (1878-1952) und Poul Heegaard axiomatisiert und erstmalig in einem Encyklopädie-Beitrag geschlossen dargestellt.[35]
Dehn promovierte 1900 bei Hilbert. Er zeigte die Unmöglichkeit eines Beweises des Legendre-Satzes von 1810 ohne Benutzung des Archimedischen Axioms. Danach habilitierte er sich in Münster mit einer Lösung des 3. Hilbertsche Problems innerhalb eines Jahres nach dessen Formulierung auf dem Pariser Mathematiker-Kongress1900. Ende 1911 ging Dehn an die Universität Kiel, wo er Landsberg und dessen

---

[33] F. Engel: *Friedrich Schur,* DMV-Jahresbericht 45 (1935), S. 1.
[34] F. Schur: *Lehrbuch der analytischen Geometrie,*Veit&Comp., Leipzig 1898.
[35] M. Dehn, P. Heegaard: *Analysis situs,* Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften IIIAB3, 1907.

Promovenden Jakob N i e l s e n (1890-1959) traf, der hier seit 1908 studierte. Nach dem plötzlichen Tod von Landsberg im September 1912 schloss sich Nielsen Dehn an. Promotion 1913 in Kiel, Habilitation in Göttingen, schließlich erhielt er 1920 an der TH Breslau eine Professur und wurde Dehns Kollege. Bemerkenswert sind seine beiden im März 1921 in Breslau gehaltenen Vorträge: *Die Abbildungstypen geschlossener Flächen und ihre Beziehungen zu unendlichen Gruppen* – gewissermaßen ein Forschungsprogramm zu Flächentransformationen, wobei er Landsbergers und Dehns Anregungen weiterführte[36]. Im gleichen Jahr ging er nach Kopenhagen und realisierte sein Programm in vier bedeutenden Arbeiten[37], so dass er heute zu den besten dänischen Mathematikern der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts zählt.

Das wissenschaftliche Potential auf dem Gebiet der Mathematik in Breslau wurde durch die Eröffnung im Oktober 1910 der Königlichen Technischen Hochschule zu Breslau bedeutend verstärkt. Die ersten Mathematik-Professoren waren Steinitz und Constantin C a r a t h é o d o r y (1873-1950), der neben Grundvorlesungen zur „Höheren Mathematik" auch über „Ausgewählte Kapitel der Analysis" gelesen hat, allerdings schon 1913 als Klein-Nachfolger nach Göttingen ging. Dafür kam Dehn an die TH und hat hier mit Steinitz,bis zu dessen Weggang 1920 nach Kiel auf dem Spezialgebiet der Topologie zusammengearbeitet. Der erste Kontakt ergab sich schon 1908, als Steinitz in seiner Arbeit über die Typisierung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten die Dehn/Heegaard'sche Axiomatik kritisierte[38] und darauf Dehn 1910 die Kritik für n=3 mit dem sogenannten Dehn'schen Lemma abwehren konnte.[39]

Mengentheoretische Topologie wurde an der Breslauer Universität eingeführt durch Erhard S c h m i d t (1876-1959), der Rosanes ablöste. Er hielt hier erstmalig im Wintersemester 1911/12 eine Vorlesung über Mengenlehre (2-std.) und letztmalig (4-std.) im Sommersemester 1917. Unter seinen Hörern waren insbesondere Heinz H o p f (1894-1971) und Hellmuth K n e s e r (1898-1973). Hopf vermittelte uns davon später als weltweit anerkannter Topologe einen Eindruck, hervorgerufen speziell durch den damals vorgetragenen Brouwer'schen Beweises vom Satz von der Invarianz der Dimensionszahl gegenüber topologischen Abbildungen:

„Ich war fasziniert; diese Faszination – durch die Kraft der Methode des Abbildungsgrades – hat mich nicht wieder verlassen, sondern große Teile meiner Produktion entscheidend beeinflußt. Und wenn ich heute den Gründen für diese Wirkung nachgehe, so sehe ich besonders zweierlei: erstens die Eindringlichkeit und mitreißende Begeisterung des Vortrages von Erhard Schmidt, und zweitens meine eigene gesteigerte Aufnahmefähigkeit während einer vierzehntägigen Unterbrechung eines langjährigen Militärdienstes."[40]

---

[36] J. Nielsen: *Collected mathematical papers,*edited by V.L.Hansen, Volume 1, Birkhäuser, Boston 1986.
[37] J. Nielsen in Acta Mathematica 1927, 1929,1932 und 1942.
[38] E. Steinitz: *Beiträge zur Analysis situs,* Sitzungsberichte der Berliner Mathem.Gesellschaft VII (1908),S. 32.
[39] M. Dehn: *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes,* Mathematische Annalen 69 (1910), S. 147.
[40] H. Hopf: *Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie,* DMV-Jahresbericht 68(1966), S.182f.

H. Hopf wurde in dem heute eingemeindeten Breslauer Vorort Gräbschen geboren. Er besuchte von 1904 an das König-Wilhelm-Gymnasium in Breslau, das er im Mai 1913 mit dem Abitur abschloss. Anschließend studierte er Mathematik und Physik bei A. Kneser, E. Schmidt, R. Sturm, E. Steinitz und M. Dehn bis zum Ausbruch des Ersten Weltkrieges. Erst im Dezember 1918 konnte er sein Studium regulär fortsetzen. Da Schmidt bereits 1917 als Nachfolger von H.A. Schwarz nach Berlin berufen wurde, ging Hopf im Herbst 1920 nach Berlin, wo er auch Vorlesungen bei Issai Schur, Max Planck und Georg F e i g l (1890-1945) hörte, letzterer – auch durch Schmidt zur Topologie gebracht - wurde von 1935 bis 1945 Direktor des Mathematischen Instituts der Universität Breslau. Hopf promovierte bei Schmidt 1925 mit der Dissertation *Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten.* Ein Jahr später habilitierte er sich in Berlin mit zwei Arbeiten[41], die er gleich in seiner Vorlesung *Kombinatorische Topologie* seinen Studenten vorstellte, unter denen Hans Freudenthal 1930, Willi Rinow 1932 und Erika Pannwitz 1933 bei Hopf promovierten. Wichtig ist noch die Beziehung zu P.S. Alexandroff (1896-1982) zu erwähnen, die 1925 begann:
„Mein wichtigstes Erlebnis in Göttingen war es, daß ich dort Paul Alexandroff traf. Aus diesem Zusammentreffen wurde bald eine enge Freundschaft; … Alexandroff war, als ich ihn kennenlernte, bereits einer der großen Männer in der rein-mengentheoretischen Topologie; aber er war auch gerade dabei, den Begriff des „Nerven“ einzuführen, der die trennende Wand zwischen der mengentheoretischen und der algebraischen Topologie beseitigen sollte.“[42]

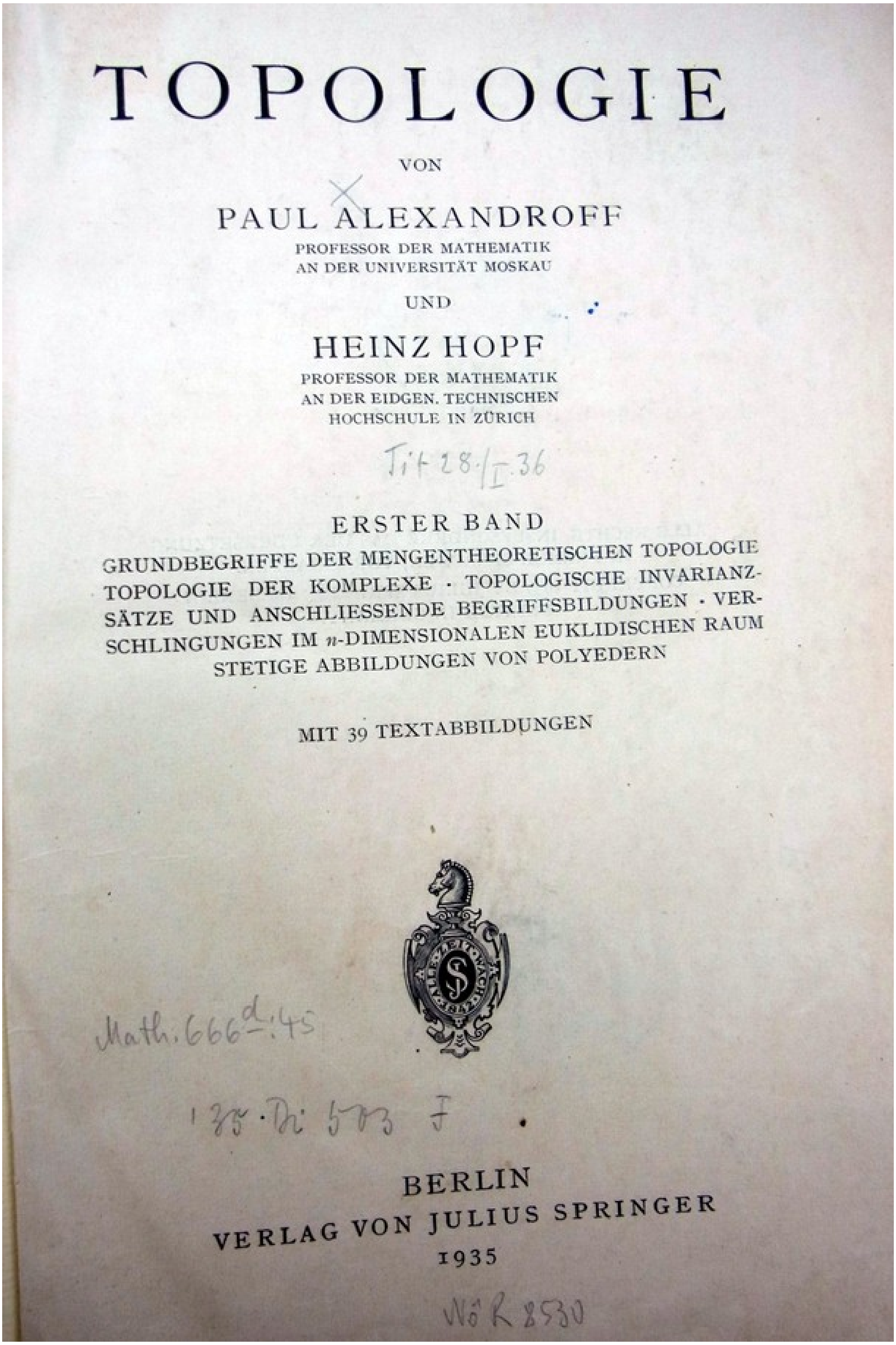
Hopf und Alexandroff verbrachten 1927/28 ein Jahr als Rockefeller-Stipendiaten in Princeton (USA), wo sie in engen Kontakt zu O. Veblen, S. Lefschetz und J.W. Alexander arbeiteten. 1928 wurde Alexandroff Professor der Moskauer Universität und Hopf 1931 Nachfolger von A. Weyl an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. 1935 erschien ihr gemeinsames von Courant in Göttingen schon angeregtes Buch *Topologie*[43] in der Springer-Reihe Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, in deren Herausgebergremium er in den 50er Jahren eintrat.
Von Hopfs Züricher Promovenden führten sein Werk an der ETH Eduard Stiefel und Beno Eckmann weiter, in den USA James Johnston Stoker und Hans Samuelson.
Von 1955 bis 1958 war Heinz Hopf Präsident der International Mathematical Union.

Hellmuth K n e s e r wurde 1898 in Dorpat (Livland) geboren und kam mit der Berufung seines Vater Adolf Kneser 1905 nach Breslau. Nach Schulbesuch und Abitur studierte Hellmuth vom Sommersemester 1916 an - er war aus gesundheitlichen Gründen nicht eingezogen – 5 Semester in Breslau. Dazu schrieb er später:

„Die ersten stärkeren Einflüsse auf mein wissenschaftliches Werden gingen von meinen akademischen Lehrern Adolf Kneser und Erhard Schmidt aus. Adolf Kneser, mein Vater, hat meine Hinwendung zur Mathematik vor sich gehen lassen, aber nicht anregend gefördert, … Im Studium gab er mir die Grundlagen; … In Erhard Schmidts Vorlesungen bekam ich den ersten Eindruck von der Eleganz und der Tragweite der modernen begrifflichen Methoden in der Mathematik.“[44]

---

41 H. Hopf: *Abbildungsklassen..., Vektorfelder in n-dim.Mannigfaltigkeiten,* Math.Annalen 95(1926), S. 209-250.
42 H. Hopf: *Ein Abschnitt...*(Fußnote 38), S. 184.
43 P. Alexandroff, H.Hopf: *Topologie I,* Springer, Berlin 1935.
44 H. Kneser: *Antrittsrede,* Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahresheft 1957/58.



TOPOLOGIE

VON

PAUL ALEXANDROFF

PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT MOSKAU

UND

HEINZ HOPF

PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER EIDGEN. TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

Tit 28./I.36

ERSTER BAND

GRUNDBEGRIFFE DER MENGENTHEORETISCHEN TOPOLOGIE
TOPOLOGIE DER KOMPLEXE · TOPOLOGISCHE INVARIANZSÄTZE UND ANSCHLIESSENDE BEGRIFFSBILDUNGEN · VERSCHLINGUNGEN IM n-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM
STETIGE ABBILDUNGEN VON POLYEDERN

MIT 39 TEXTABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1935

Abb. 14: Courants Auftragswerk.

Daneben lasen zur Geometrie Steinitz und Rudolf Sturm, der den Lehrstuhl seines Lehrers Schröter 1892 übernommen hatte und dessen Werk fortsetzte. Sturm trug vor über *Analytische Geometrie* der Ebene und des Raumes, über *Differentialgeometrie* und über *Geometrische Verwandtschaften* I und II nach seinem vierbändigen Werk[45]. Steinitz las *Projektive (synthetische) Geometrie.* Er scheint Kneser zu dessen ersten wissenschaftlichen Arbeit[46]veranlasst zu haben. Den weiteren Teil seiner Studien verlegte Kneser nach Göttingen, in das damalige Weltzentrum der Mathematik:

„Meine Ausbildung vollzog sich zwischen den verschiedenen Strömungen des überreichen Angebots von Anregungen, das von den ansässigen akademischen Lehrern und den zahlreichen ebenso bedeutenden Besuchern aus aller Welt ausging. So erwarb ich eine Übersicht über einen hübschen Teil der Mathematik … Der Preis dafür bestand vielleicht in dem Verzicht auf die Stoßkraft, die mancher andere aus der klugen Beschränkung auf ein Spezialgebiet gewinnt.“[47]

Die Anregung zu seiner Dissertation[48] über die mathematische Behandlung der Axiome der Physik erhielt Kneser von Hilbert gemäß dessen 6. Problem von 1900. Es hat den Anschein, als ob er diese nur als notwendige Pflichtübung („formeller Abschluß“- wie er selbst schrieb) verstanden hat, wobei er allerdings topologische Methoden anwandte. Im September 1921 nahm H. Kneser mit seinem Vater (beide offiziell aus Breslau registriert) am Deutschen Mathematikertag in Jena teil. Hellmuth hielt dort am 20.9. einen Vortrag mit der Kernaussage:
„Insbesondere enthält eine reguläre Kurvenschar auf einer einseitigen Ringfläche immer mindestens eine geschlossene Kurve.“[49].

Im Sommer 1922 reichte er eine Habilitationsschrift *Bestimmung aller regulären Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen* ein, die ihm im Dezember den Privatdozenten an der Universität Göttingen einbrachte. Als Rockefellerstipendiat arbeitete Kneser im Sommer 1925 in Kopenhagen während er für Oktober bereits zum Ordinarius an der Universität Greifswald berufen wurde. Bemerkenswert ist seine Arbeit *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten,* worin er einen Zerlegungssatz kompakter Mannigfaltigkeiten unter Verwendung des Dehn'schen Lemmas bewies. Letzteres wies in der Begründung eine Lücke auf, die er erst während der Drucklegung bemerkte[50], selbst aber nicht schließen konnte. Erst 1957 gelang das Papakyriakopoulos.[51] Damit erhielten manche schönen Resultate von Dehn und Kneser zur Topologie der Mannigfaltigkeiten erst spät die erforderliche Bestätigung und Anerkennung.

---

[45] R. Sturm: *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften,* Bd.I (1908), Bd.II (1908), Bd.III + IV(1909).
[46] H. Kneser: *Eine Erweiterung des Begriffes „konvexer Körper“,* Mathematische Annalen 82 (1921), S. 287-296.
[47] H. Kneser: Kurz*biographie,* In: Forscher und Gelehrte, hrsg. Von W.E. Böhm. Stuttgart 1966, S. 116.
[48] H. Kneser: *Untersuchungen zur Quantentheorie,* Mathematische Annalen 84 (1921), S. 277-302.
[49] H. Kneser: *Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen,* Jahresber. Dt. Mathematiker-Vereinigung 30(1921), S. 84.
[50] H. Kneser: *Geschlossene Flächen in dreidim. Mannigfaltigkeiten,* DMV-Jahresbericht 38 (1929), S. 260.
[51] C. Papakyriakopoulos: *On Dehn's Lemma and the asphericity of knots,* Annals of Mathematics 66 (1957), 1-26.

17. EPILOG

Die Mathematik in Deutschland kennt die Schulen von: Berlin um Kummer, Kronnecker und Weierstraß sowie Göttingen um Klein und Hilbert, vielleicht noch Königsberg um Jacobi. Die Leistungen in den 18 anderen Universitätsstädten, die bereits im 19. Jahrhundert über mathematische Seminare verfügten, wird seltener global erwähnt. Mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, die 1890 gegründet wurde, konnte das bestehende enge Netz zwischen den Mathematikern, die anstellungsbedingt ihren Lehrort häufig wechselten, verstärkt werden. Deshalb ist es schon problematisch, mathematische Resultate geographisch allein dem letzten Aufenthaltsort des Autors zuzuordnen. Wir haben dagegen die genealogische Komponente hervorgehoben[52] und die prägende Studienzeit vielleicht über Gebühr betont. Daneben wurde zur Charakterisierung der akademischen Lehrern der Geometrie in Breslau ihre Vorgeschichte und manchmal auch ihr Wirken nach einer Wegberufung registriert.

Friedrich Engel (1861-1941) sprach noch 1935 von der „Breslauer Schule" der Geometrie. Unter diesem Titel sollte hier daran erinnert werden, welche nahmhaften deutschen Mathematiker dort gelehrt oder ausgebildet wurden. Gleichzeitig wird versucht, einem Laien mit Abitur einen kleinen Eindruck von der Geometrie im 19. Jahrhundert und am Anfang des 20. zu vermitteln.

[52] H.-J. Girlich: *Zur Genealogie bedeutender Mathematiker an der Universität zu Breslau,* Univ. Wrocławski 2011.