DIE BRESLAUER SCHULE DER GEOMETRIE (I)

Hans-Joachim Girlich (Leipzig)

Die Geometrie wurde zu Beginn des 19.Jahrhunderts durch den französischen Gelehrten G. Monge und seine Schüler, insbesondere J.V. Poncelet, sowie J.D. Gergonne geprägt. Danach erlebte die geometrische Forschung einige Jahrzehnte lang in den deutschen Landen durch A.F. Möbius, J. Steiner, C.v. Staudt, J. Plücker und F. Klein eine Blütezeit. Gegen Ende des Jahrhunderts übernahm Italien nach L. Cremona mit C. Segre, F. Enriques und Castelnuovo die Federführung. Diese Entwicklung der Geometrie spiegelte sich in den geometrischen Beiträgen von Gelehrten und ehemaligen Studenten der Universität Breslau wider, über die in der vorliegenden Note berichtet werden soll. Zeitgenossen sprachen von der „Breslauer Schule der Geometrie“, weil in Deutschland des 19. Jahrhunderts nur in Breslau der Schwerpunkt der mathematischen Ausbildung mehr als 50 Jahre vornehmlich auf dem Gebiet der synthetischen Geometrie lag und von hier aus wesentliche Impulse zu den Grundlagen der Geometrie und zur kombinatorischen Topologie ausgingen.

Der hier vorliegende Teil (I) umfasst die Zeitspanne von der Eröffnung der Universitas litterarum Vratislaviensis 1811 bis zur Gründung des Deutschen Reiches 1871.

1. DIE UNIVERSITÄT ZU BRESLAU

In der schlesischen Haupt- und Handelsstadt Breslau wurde höhere Bildung am Ende des 17. Jahrhunderts in den evangelischen Gymnasien von St. Elisabeth und St. Maria-Magdalena sowie am Jesuiten-Kolleg vermittelt. Der habsburgische Landesherr und römische Kaiser Leopold I. (1640-1705) erhob das Kolleg 1702 zur *Academia Wratislaviensis Societatis Jesu* (Leopoldina). Sein Sohn Karl VI. (1685-1740) ließ für diese nur aus zwei Fakultäten (katholische Theologie und Philosophie) bestehende Akademie (einschließlich des katholischen Gymnasiums) ein barockes Hauptgebäude errichten, das heute wieder in alter Erhabenheit (von 1740) prangt.

Abb.1: Die Universität an der Oder.

Die österreichische Erbproblematik nutzte der preußische König Friedrich II. (1712-1786) zur Annexion Schlesiens. Die damit verbundenen Kriege brachten für die Breslauer Hohen Schule bis zum Frieden von Hubertusburg große Einbußen. Erst die beträchtlichen Gebietsverluste Preußens durch Napoleon führten zu weitreichenden Reformen auch auf dem Bildungssektor. So wurde die 1506 gegründete Universität von Frankfurt an der Oder (Viadrina) dort aufgelöst und nach Breslau überführt. Die Vereinigung von Leopoldina und Viadrina zu einer fünf Fakultäten umfassenden *Universitas litterarum Viadrina Vratislaviensis* konnte am 20. Oktober 1811 in der Aula Leopoldina im oben erwähnten Gebäude feierlich eröffnet werden. Zu den Professoren der Philosophischen Fakultät gehörten neben dem Kanonikus A. Jungnitz und C. Rake von der Leopoldina sowie als dazu Berufene der Naturwissenschaftler H. Steffens von der Universität Halle und der durch seine astronomischen Beobachtungen bekannte W. Brandes aus dem Oldenburgischen. Rektor wurde der aus Frankfurt/Oder kommende Mediziner K.A.W. Berends.[1]

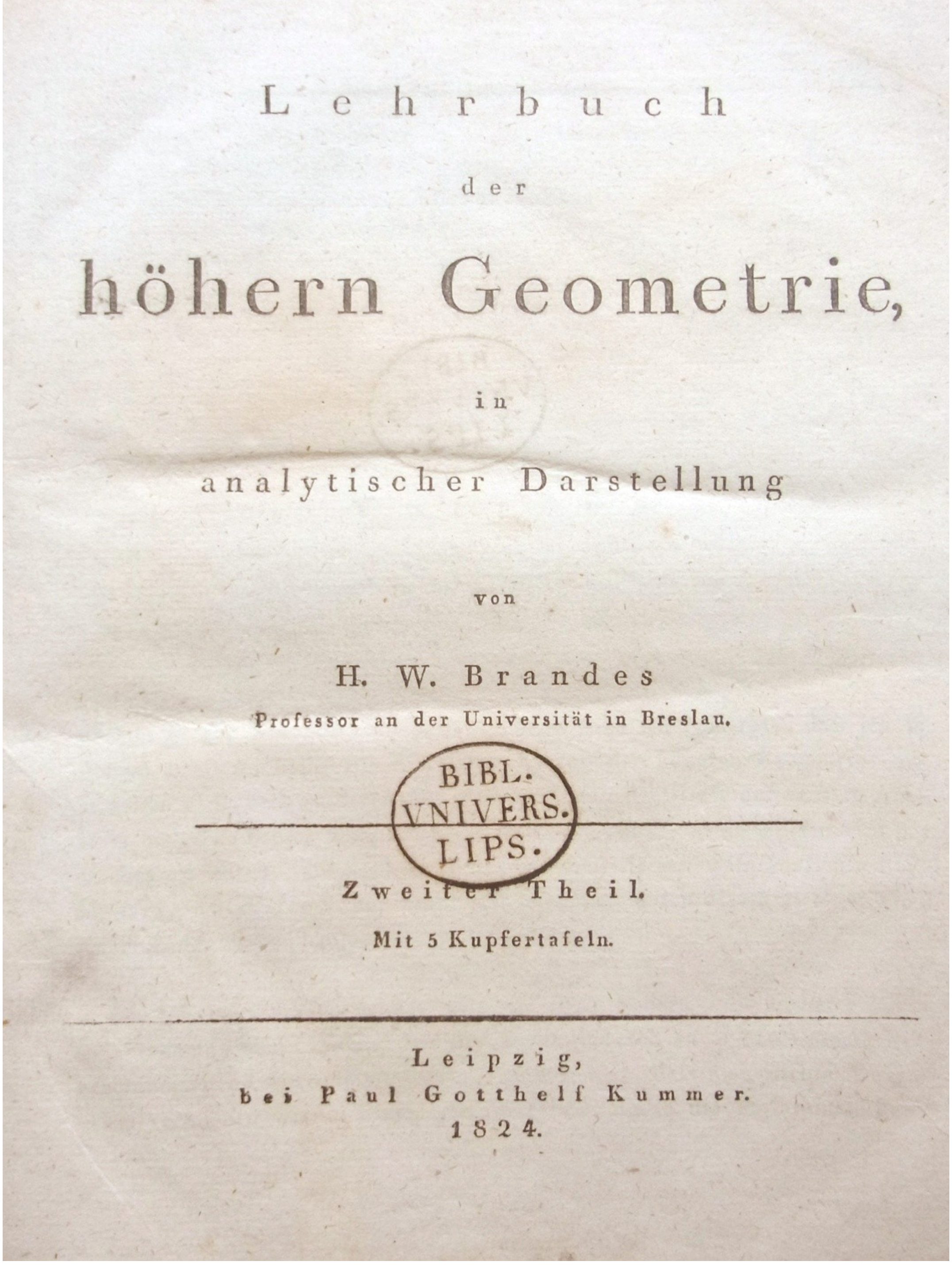
2. DIE GEOMETRIE IN DEN ERSTEN JAHREN DER UNIVERSITÄT

Über Geometrie lasen in Breslau von 1811 bis 1826 nur die Professoren Rake und Brandes.
Carl Rudolf R a k e (1766-1828) kündigte eine Vorlesung im Startsemester 1811/12 an mit „Geometrie in Ebene und Raum sowie Trigonometrie erklärt anhand der *Elemente von J.F. Lorenz*“[2] Johann Friedrich L o r e n z (1738-1807) hatte bereits1781 *Euklids Elemente* in deutscher Sprache herausgegeben. Er hielt sich in seinem Lehrwerk von 1785/1786 bezüglich der Geometrie einerseits (als „reine Geometrie“, die keiner fremden Prinzipien bedarf) noch weitgehend an das griechische Vorbild wie auch der gebürtige Breslauer Christian Wolff in seinen *Anfangs-Gründe aller Mathematischen Wissenschaften* von 1710.[3] Andererseits (bei der „gemischten Geometrie“, das heißt „den mit Arithmetik gemischten Theil der Geometrie“) versuchte er mit Trigonometrie und Elementen der analytischen Geometrie „die Geometrie des Euklides der neueren Mathematik ganz einzuverleiben“.[4]Auch im Wintersemester 1817/18 las Rake nach Lorenz über ebene und sphärische Trigonometrie. In den folgenden Jahren erweiterte er sein Vorlesungsangebot bis zu den Kegelschnitten. Dabei stützte er sich weiter auf gängige Lehrbücher. Eigene wissenschaftlichen Veröffentlichungen sind nicht bekannt.[5]

Heinrich Wilhelm B r a n d e s (1777-1834) , der in Göttingen Baukunst und Landesvermessung bei Lichtenstein und Kästner studiert, danach elf Jahre als Deichconducteur am Jadebusen gearbeitet hatte, begann seine Lehrtätigkeit 1811 mit „Elemente der Arithmetik und der Geometrie nach eigenem Kompendium vorgetragen.“. Dazu verwandte er sein zweibändiges *Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie,* das 1808 und 1810 in Oldenburg erschienen war. Obwohl seine wissenschaftlichen Interessen stärker auf den Gebieten der Astronomie und der Meteorologie[6] lagen, folgte er dem Berufungsauftrag als Professor der Mathematik und versuchte in Breslau die Lehre auf dem Felde der Geometrie zu modernisieren. Er hielt Vorlesungen zur analytischen Geometrie und zur dazu erforderlichen Analysis. Hierfür verfasste er 1820 das Buch *Vorbereitungen zur höheren Analysis* im Stil der kombinatorischen Analysis von K.F. Hindenburg[7], in dessen *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* er bereits 1799 den Artikel *Über die Durchschnitte ebener Flächen mit Flächen zweyter Ordnung* publiziert hatte. Über Differential- und Integralrechnung las er nach W.J.G. Karstens *Lehrbegriffe der gesamten* Mathematik, Theil 2 [8]. Mit der Erfahrung seiner Breslauer Lehrtätigkeit brachte er bereits 1816 *Die Hauptlehren der Geometrie und Trigonometrie* sowie 1822 und 1824 das zweiteilige *Lehrbuch der höheren Geometrie in analytischer Darstellung* heraus. Dabei stützte er sich bei letzterem auf G. Monge:

1 A. Herzig: *Die Vereinigung von Leopoldina und Viadrina 1811.* In: Conrads (Hg.):Die tolerierte Universität, S.253.
2 Index Lectionum in Viadrina Vratislaviensi per hiemem anni MDCCCXI, S.7 (deutsche Übersetzung: H.G.); J.F. Lorenz: *Die Elemente der Mathematik*. Erster Theil, Zweytes Buch, Leipzig 1785.
3 H.-J. Girlich: *Christian Wolff (1679-1754) und die mathematischen Wissenschaften*, SRU, Bd.4, Dresden 2010.
4 J.F.Lorenz: *Die Elemente der Mathematik.* Erster Theil, Vorwort, S.VIII/IX.
5 *Verzeichnis der auf der Universität Breslau im SS 1821 (SS 1822, WS 1823/24) zu haltenden Vorlesungen.* J.C.Poggendorff: *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften.* 1863.
6 H.W. Brandes : *Beiträge zur Witterungskunde*, Leipzig 1820.
7 H.-J. Girlich: *Carl Friedrich Hindenburg und das Herausbilden deutschspr. Journale der Mathematik.* 2008.
8 W.J. Karsten: *Anfangsgründe der Mathematischen Analysis und höheren Geometrie.* Greifswald 1786.

Application de l'analyse à la géométrie (1804) sowie auf Ergebnisse von Euler, Legendre, Lagrange und seines Göttinger Kommilitonen Karl Friedrich Gauß.



Lehrbuch

der

höhern Geometrie,

in

analytischer Darstellung

von

H. W. Brandes

Professor an der Universität in Breslau.

Zweiter Theil.

Mit 5 Kupfertafeln.

Leipzig,

bei Paul Gotthelf Kummer.

1824.

Abb.2: Ein zeitgemäßes Lehrbuch von Brandes (1824).

Unter Brandes Breslauer Studenten sind aus Sicht der Geometrie Scholz und Scherk von Interesse. Ernst Julius S c h o l t z (1799-1841) promovierte 1826 über „Die Gestalt eines bei Luftwiderstand fallenden Tropfens“ und habilitierte sich anschließend in Breslau 1827 mit einer Arbeit über Kegelflächen und wurde hier nach dem Tode von Rake außerordentlicher und 1834 ordentlicher Professor sowie Direktor der Universitätssternwarte. Seine Promovenden bearbeiteten vorrangig geometrische Themen, die zum Teil als Preisaufgaben der Philosophischen Fakultät erschienen, so zum Beispiel eine über Kurven doppelter Krümmung als Schnitte von Rotationsflächen 2.Ordnung,

die Ernst Baumgart gewann (Promotion im Januar 1842). Moritz Sadebeck arbeitete nach dem Studium als Lehrer am Breslauer Maria-Magdalena-Gymnasium und betätigte sich intensiv als Geodät[9] Scholtz kam 1841 durch einen Jagdunfall ums Leben, dadurch konnte ein bedeutender Schüler seines Kommilitonen Scherk an die Breslauer Universität berufen werden.
Heinrich Ferdinand S c h e r k (1798-1885) studierte bei Brandes in Breslau und promovierte 1823 unter dessen Protektion in Berlin und habilitierte sich 1825 in Königsberg. Er wurde 1826 ao.Prof. und 1831 Ordinarius in Halle an der Saale, wo sein Student E.E. Kummer ein Preisausschreiben gewann und damit promovierte [10]. Auf die Scherk'schen Flächen werden wir etwas eingehen.

3. DIE SCHERK'SCHEN MINIMALFLÄCHEN

Brandes wurde im November 1825 zum ordentlichen Professor der Physik an der Universität Leipzig ernannt. Er folgte diesem Ruf in die Messestadt im März 1826. Schon 1828 wählte ihn die Fürstlich Jablonowskische Societät der Wissenschaften zu Leipzig zum Mitglied und bereits 1830 wurde er Sekretär der Gesellschaft und speziell mit der Ankündigung und Begutachtung von Preisaufgaben aus dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich betraut. Für das Jahr 1831 hatte er selbst ein offenes Problem seines Buches von 1824 als Aufgabe formuliert:

> „Man verlangt neue Untersuchungen über die Eigenschaften der krummen Fläche, die in der Gleichung
>
> $$0 = (1+q^2)\, r - 2pqs + (1+p^2)\, t \qquad (1)$$
>
> dargestellt wird, wo
>
> $$p = dz/dx\,,\; q = dz/dy\,,\; r = d^2z/dx^2\,,\; s = d^2z/dxdy\,,\; t = d^2z/dy^2\;;$$
>
> und x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Fläche sind.“ [11]

Den Preis – eine Goldmünze im Werte von 24 Ducaten - erhielt sein Breslauer Schüler Scherk, der seit 1826 in der Leipziger Nachbarstadt Halle lehrte. Diese umfangreiche Preisarbeit wurde in der Zeitschrift der Jablonowski-Gesellschaft abgedruckt und nach Scherks Weggang an die Universität Kiel zu einem Artikel für Crelle's Journal bearbeitet und erweitert [12]. Scherk entwickelte darin eine Methode, wie man aus der von Monge angegebenen allgemeinen Lösung eine Klasse einfach angebbarer Flächen finden konnte, die der Gleichung (1) genügten. Darunter waren nicht nur die bereits von Meusnier 1776 gefundene Schraubenfläche und das Katenoid, das durch Umdrehung der Kettenlinie um eine Achse erzeugt wird, sondern auch die beiden schon kontemporär[13] nach ihm benannten Flächen:

(elliptische) Scherk'sche Fläche:

$$\exp z = \cos y / \cos x\,, \qquad (2)$$

(hyperbolische) Scherk'sche Fläche

$$\sin z = \sinh x \; \sinh y\,, \qquad (3)$$

wobei sinh x den sinus hyperbolicus bezeichnet.
Scherk nannte die Fläche (3) „die Correspondierende der Fläche (2), indem sie zu jener in einer ähnlichen Beziehung steht, wie das Ellipsoid zu den Hyperboloiden.“ [14]
Die Scherk'schen Flächen wurden nicht nur von den europäischen Zeitgenossen honoriert, sondern mehr als 150 Jahre später wieder aufgegriffen. So verwendeten amerikanischen Chemikern

---

9 M. Sadebeck: *Triangulation der Stadt Breslau.* Breslau 1855.
10 H.-J. Girlich: *Ernst Eduard Kummer (1810-1893) in Schlesien*, SRU, Bd.6, S. 233, Dresden 2014.
11 H.W. Brandes: *Lehrbuch der höhern Geometrie*, 2.Theil,S.347; Jablonowski-Gesellschaft, Jahresbericht 1830.
12 H.F. Scherk: *De proprietatibus superficiei quae continetur aequatione $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$.* Acta Soc.Iabl. 4(1832), S.204-280; *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*. Crelle's J.d.M. 13(1835).
13 R. Kummer: *Die Flächen mit unendlichvielen Erzeugungen.* Inaugural-Dissertation, Leipzig 1894, S. 52.
14 H.F. Scherk: *Bemerkungen über die kleinste Fläche*.... Crelle's Journal der Mathematik 13(1835), S. 189.

derartige Flächen zur geeigneten Darstellung von Copolymeren [15].
Über die Einbettung der Scherk'schen Flächen in die Funktionentheorie und der Einsatz moderner Rechentechnik zu ihrer Darstellung wurde ihre exponierte Stellung unter den Minimalflächen in einer Sommerschule beleuchtet, die unter dem Titel *Global theory of minimal surfaces* am Mathematical Sciences Research Institute Berkeley im Jahre 2001 durchgeführt worden ist.[16]

4. DIE ÜBERGANGSZEIT

Während in den 20er und 30er Jahren des 19. Jahrhunderts die Mathematik in Breslau gegenüber den Naturwissenschaften keine bedeutende Rolle gespielt hat, änderte sich die Lage durch die Berufung von Kummer, der sich allein als Mathematiker verstand und entsprechend handelte.
Ernst Eduard K u m m e r (1810-1893) arbeitete von 1842 bis 1855 als Ordinarius in Breslau, wo er durch seine zahlentheoretischen Forschungsergebnisse weltberühmt wurde.[17] Er erhöhte beträchtlich das Niveau der mathematischen Ausbildung und veröffentlichte in Verbindung mit seiner Vorlesungskonzeption auch einige Arbeiten zur analytischen Geometrie. In seiner Breslauer Zeit wurden mit Dissertationen zur Flächentheorie T.R. Baum, H. Marbach, F.H. Siebeck, F.A. Wittiber, O. Hermes, A. Tillich und St. Szenic promoviert.
Als Kummer 1855 in der Nachfolge von Dirichlet nach Berlin ging und dort seine „geometrische Periode in der Forschung“ wesentlich verstärkte, auf die wir später noch im Detail eingehen werden, fand er in seinem Schüler vom Liegnitzer Gymnasium F. Joachimsthal für Breslau einen geeigneten Nachfolger.

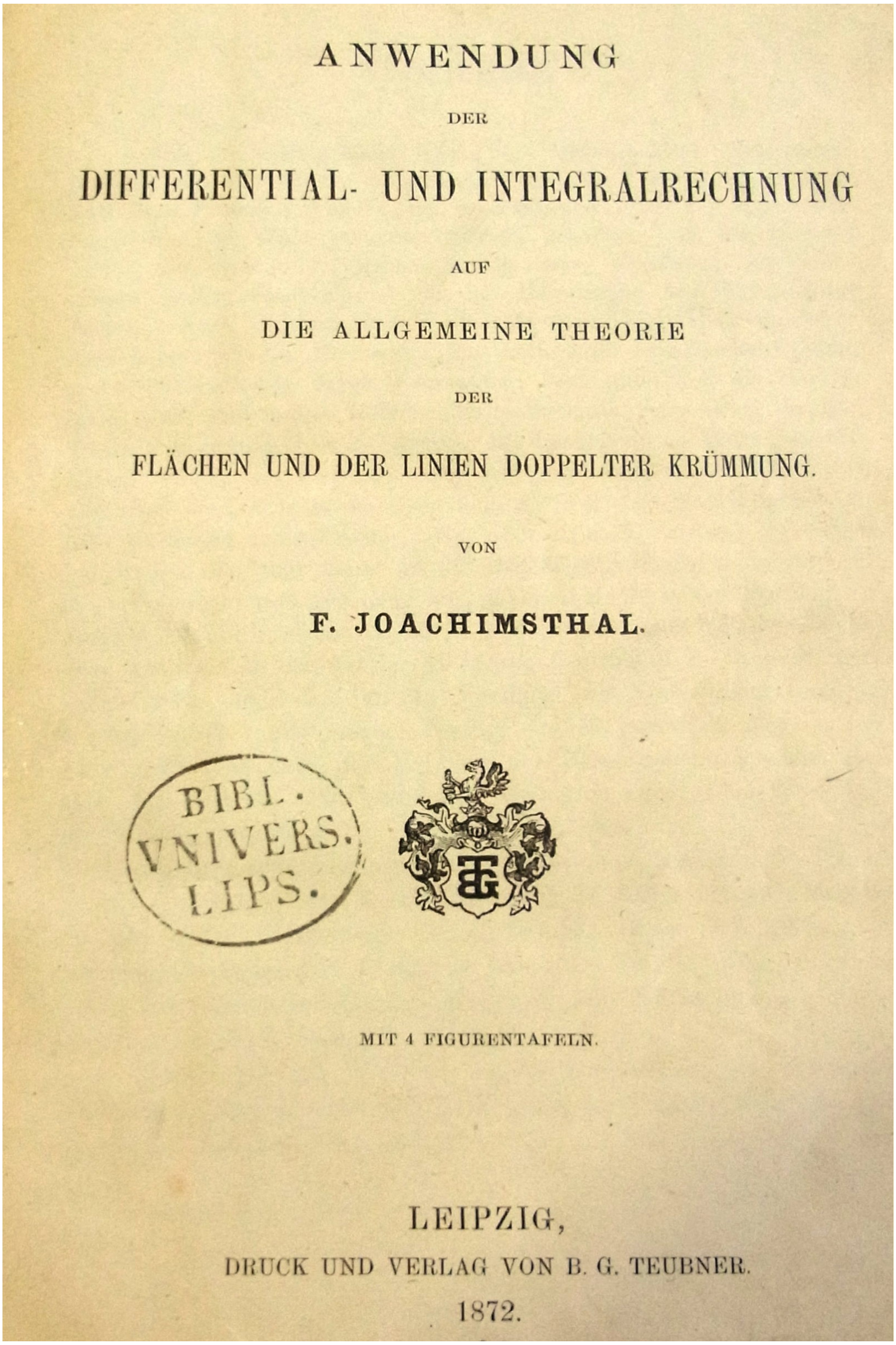
Ferdinand J o a c h i m s t h a l (1818-1861) hatte in Berlin bei Dirichlet und Steiner und in Königsberg bei Jacobi und Bessel studiert und in Halle 1840 bei Otto Rosenberger zum Thema *De lineis brevissimis in superficiebus rotatione ortis* promoviert. 1845 errang er die Venia legendi und lehrte als Privatdozent insbesondere über Flächentheorie und Variationsrechnung an der Universität von Berlin neben seiner hauptamtlichen Tätigkeit als Professor am Collège Royal Français. Joachimsthal wurde 1853 an die Universität Halle berufen, folgte aber bereits zwei Jahre später dem Ruf in die schlesische Heimat. Zu dieser Zeit war er der erste Breslauer Ordinarius, der die Entwicklung der Geometrie in der ersten Hälfte des 19.Jahrhunderts nicht nur verfolgt, sondern durch viele Beiträge im Journal für die reine und angewandte Mathematik befördert hat.
Vielleicht noch wichtiger sind seine beiden Bücher, die erst nach seinem Tode von Schülern veröffentlicht worden sind. Angeregt durch Jacobi arbeitete er an einem modernen Lehrbuch der analytischen Geometrie. Seine Breslauer Vorlesungstätigkeit führte zu einer neuen Fassung, die 1863 posthum unter dem Titel *Elemente der analytischen Geometrie der Ebene* von Oswald Hermes (Promotion Breslau 1849) herausgebracht wurde. Im Wintersemester 1856/57 beauftragte Joachimsthal den Studenten Curth Heinrich Liersemann, seine Vorlesung „ Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung“

> „wortgetreu nachzuschreiben und für die Herausgabe druckfertig abzufassen. Nach Schluss der Vorlesungen empfing Herr Professor Joachimsthal das Manuskript und hatte nach eingehender Prüfung nichts Wesentliches daran auszusetzen.[18]

Die Druckfertigstellung unterblieb zunächst, wahrscheinlich wegen Joachimsthals Arbeit an den *Elementen der analytischen Geometrie.* Bis schließlich Liersemann, der 1859 mit einer Breslauer Preisarbeit promovieren konnte, elf Jahre nach Joachimsthals Tod diese Tätigkeit übernahm und das Buch 1872 bei B.G. Teubner in Leipzig erscheinen ließ, das mehrere Nachauflagen erlebte. Denn es berücksichtigte die 30-jährige Entwicklung, die die analytische Geometrie seit 1824 zurückgelegt hatte.

---

15 E.L.Thomas: *Periodic area-minimizing surfaces in block copolymers.* Nature 334 (1988), S. 598-601.
16 M. Weber: *Classical minimal surfaces...* In: D. Hoffmann: *Global Theory of Minimal Surfaces.* S. 19-63.
17 H.-J. Girlich: *Ernst Eduard Kummer in Schlesien.* SRU, Bd.6, S.244, Dresden 2014.
18 F. Joachimsthal: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung...* Leipzig 1872, Vorrede.



ANWENDUNG

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

AUF

DIE ALLGEMEINE THEORIE

DER

FLÄCHEN UND DER LINIEN DOPPELTER KRÜMMUNG.

VON

F. JOACHIMSTHAL.

MIT 4 FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.

Abb.3: Aktuelle Vorlesungen zur höheren Geometrie in Breslau von 1857.

Der Name des Geometers Joachimsthal lebt weiter in den „Joachimsthaler Flächen“ und in den verschiedenen Sätzen von Joachimsthal. Einer dieser Sätze, über die Fußpunkte von vier Normalen an eine Ellipse von einem inneren Punkt aus [19] , übertrug er auf Normalen an ein Ellipsoid im Januar 1861 und sandte das Manuskript an „sein Journal“ nach Berlin.

[19] F. Joachimsthal: *Sur la construction des normales...,* Crelle's Journal 48(1854), S.377-380; J. Naas, H.L. Schmid: *Mathematisches Wörterbuch.* Band I, S.872.

„Noch ehe diese Abhandlung in die Oeffentlichkeit gelangt ist, hat ein frühzeitiger Tod am 5.d.M. ihren scharfsinnigen Verfasser aus der Mitte seiner Laufbahn fortgerafft. Die Grösse des Verlustes, den die Wissenschaft durch seinen Tod erleidet, wissen die Leser dieser Zeitschrift zu ermessen, die ihn aus einer Reihe von Abhandlungen als vielseitigen Forscher in den verschiedensten Theilen der Analysis und vor Allem in ihrer Anwendung auf die Geometrie kennen. Er begnügte sich nicht, die Fragen, die er behandelte, durch Hinzufügung einzelner neuer Thatsachen und Ergebnisse zu fördern, sondern ging überall bis zu den einfachsten Gründen zurück und suchte so zwischen vereinzelten Ergebnissen einen Zusammenhang aufzufinden. In dieser auf das Ganze gerichteten Thätigkeit seines klaren Geistes lag die seltene Lehrergabe,die ihn auszeichnete, und die sein Tod für den mathematischen Unterricht zu einem ebenso beklagenswerthen Ereignis macht, wie für die mathematische Literatur. Berlin, im April 1861. B.“[20]

Diesen Nachruf schrieb C.W. Borchardt, der das von August Leopold Crelle 1826 gegründete *Journal für die reine und angewandte Mathematik* seit 1856 bis 1880 fortführte.

5. JAKOB STEINERS EINFLUSS AUF DIE GEOMETRIE IN BRESLAU

Brandes hatte mit seinem Lehrbuch zur höheren Geometrie 1824 den für Naturwissenschaftler erforderlichen Wissensstand zusammengefasst. Die analytische Geometrie wurde 1827 weiter entwickelt durch August Ferdinand M ö b i u s (1790-1868) mit *Der barycentrische Calcul* und 1828 durch Julius P l ü c k e r (1801-1868) mit *Analytisch-geometrische Entwicklungen.* Beide führten homogene Koordinaten ein und konnten das *Traité des propriétés projectives des figures* von Jean Victor P o n c e l e t (1788-1867) vom Jahre 1822 ausbauen.
Jakob S t e i n e r (1796-1863) verfolgte eine andere Richtung der projektiven Geometrie. Er wollte in erster Linie eine Systematik der Geometrie schaffen, wobei er als Schüler von Pestalozzi schon bei der Lösung spezieller geometrischer Probleme auf den Einsatz eines analytischen Formelapparates weitgehend verzichtete und sich auf eine synthetische Geometrie konzentrierte. So veröffentlichte Steiner in den ersten drei Jahrgängen von Crelle's Journal allein 14 Arbeiten, weitere in den *Annales de Mathématiques* von Joseph Diaz G e r g o n n e (1771-1859) bis er 1832 den Durchbruch erzielte mit seinem bedeutenden Werk:
Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc.
In der Vorrede formulierte er ein fünf Teile umfassendes Programm und stellte dann als Teil I die Prinzipien an Hand der Grundgebilde projektive Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel dar.

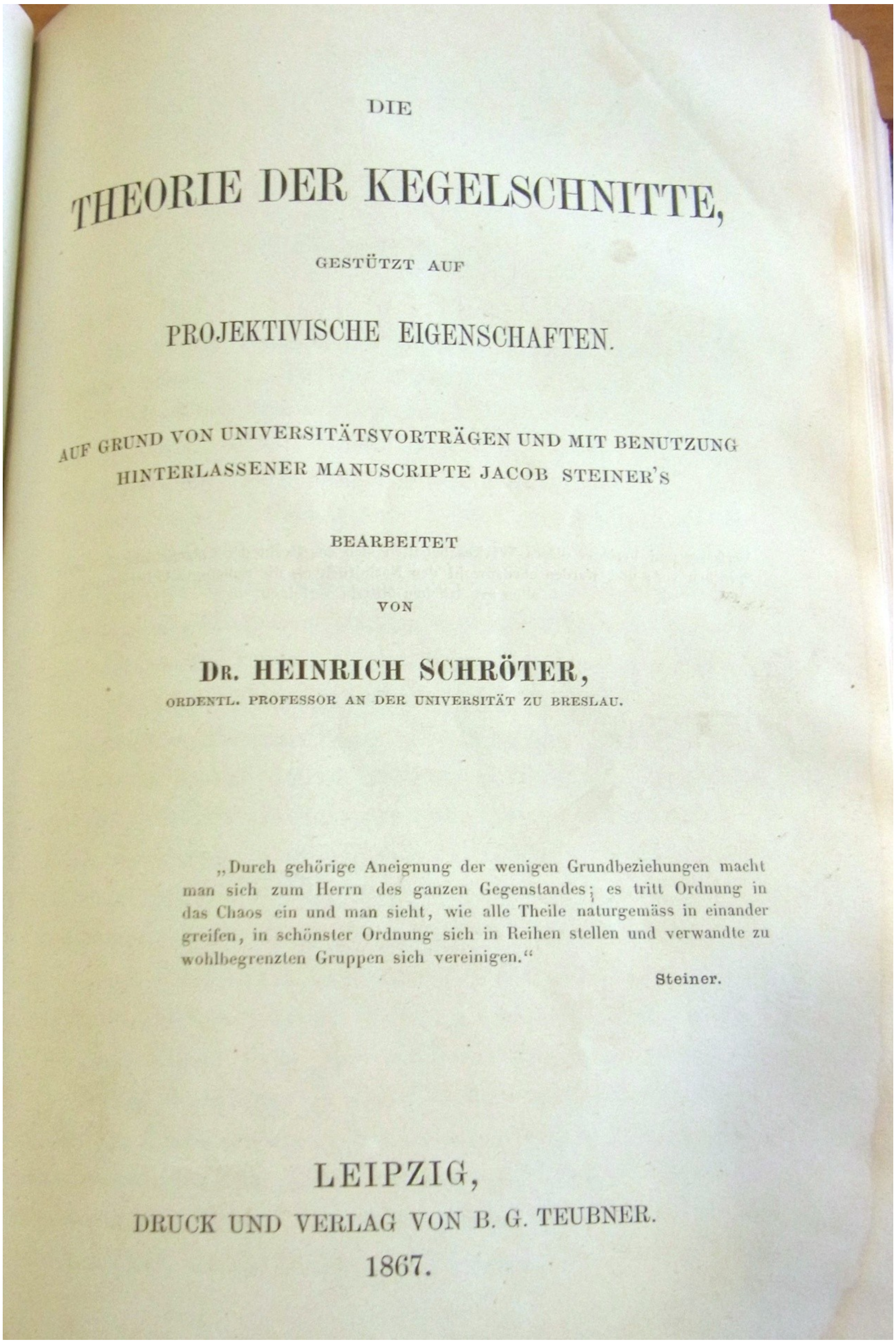
„Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind. Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt.[21]

Bevor er sich den nächsten Teilen seines Programms zuwenden konnte, veröffentlichte Steiner im Jahre 1833 ein Werk, das ihm eine bessere Position jenseits der Schulbehörde einbringen sollte: *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung.*[22]
Endlich wurde Steiner 1834 zum außerordentlichen Professor an die Berliner Universität berufen und konnte somit durch Vorlesungen unter seinen Studenten Mitstreiter gewinnen.

Neben Joachimsthal ist vor allem Heinrich Eduard S c h r ö t e r (1829-1892) zu nennen. Nach Studien in seiner Heimatstadt Königsberg bei Richelot und Hesse waren Steiner und Dirichlet in Berlin seine Lehrer. Schröter habilitierte sich mit einer Arbeit über elliptische Funktionen im

[20] *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 59(1861), S.124, Fußnote.
[21] J. Steiner: *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten.* Berlin 1832, S. V/VI.
[22] J. Steiner: *Die geometrischen Constructionen* …. Berlin 1833.

Oktober 1855 an der Universität zu Breslau, wurde dort 1858 Extraordinarius und 1861 Nachfolger von Joachimsthal. Letzterer hatte ihn wohl in den zurückliegenden fünf Jahren in Breslau endgültig forschungsmäßig für die Geometrie gewonnen. Speziell zur synthetischen Geometrie wurde er schon in Berlin nach dem „persönlichen Verkehr, durch den ihn der grosse Geometer auszeichnete“ hingezogen.[23] Später bestärkte ihn auch C.F. Geiser, der Großneffe und Nachlassverwalter von Steiner, der Schröter bat, die eigene Nachschrift der von diesem im Wintersemester 1852/53 gehörten Steiner'schen Vorlesung „Ueber die neueren Methoden der synthetischen Geometrie“ mit Benutzung hinterlassener Manuskripte zu bearbeiten und herauszugeben. So erschienen 1867 bei B.G. Teubner *Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie* in zwei Teilen:



DIE

THEORIE DER KEGELSCHNITTE,

GESTÜTZT AUF

PROJEKTIVISCHE EIGENSCHAFTEN.

AUF GRUND VON UNIVERSITÄTSVORTRÄGEN UND MIT BENUTZUNG
HINTERLASSENER MANUSCRIPTE JACOB STEINER'S

BEARBEITET

VON

DR. HEINRICH SCHRÖTER,

ORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

„Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“

Steiner.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1867.

Abb.4: Die Steiner/Schröter'schen Vorlesungen über die Theorie der Kegelschnitte.

[23] R. Sturm: *Heinrich Schröter.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 109 (1892), S.358.

1) *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung* bearbeitet von C.F. Geiser und
2) *Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften* bearbeitet von Schröter, der aus dem vorliegenden Material und seinen eigenen Breslauer Vorlesungen daraus ein Handbuch gestaltete, das mehreren Generationen als Einführung in die synthetische Geometrie diente.
Damit waren die beiden Steiner'schen Hauptvorlesungen publiziert und gleichzeitig der Teil V des Steiner'schen Programms erfüllt. Das Erledigen auch der anderen Teile des Programms, dem weiteren Ausgestalten der synthetischen Geometrie verschrieb sich Schröter in seiner 37jährigen Hochschullehrertätigkeit in Breslau und konnte dazu ebenfalls einige seiner Schüler wie Rudolf Sturm, Jakob Rosanes, Moritz Pasch, Friedrich Schur und Ernst Steinitz gewinnen. Über diese „Breslauer Schule der Geometrie“ soll im Folgenden berichtet werden.

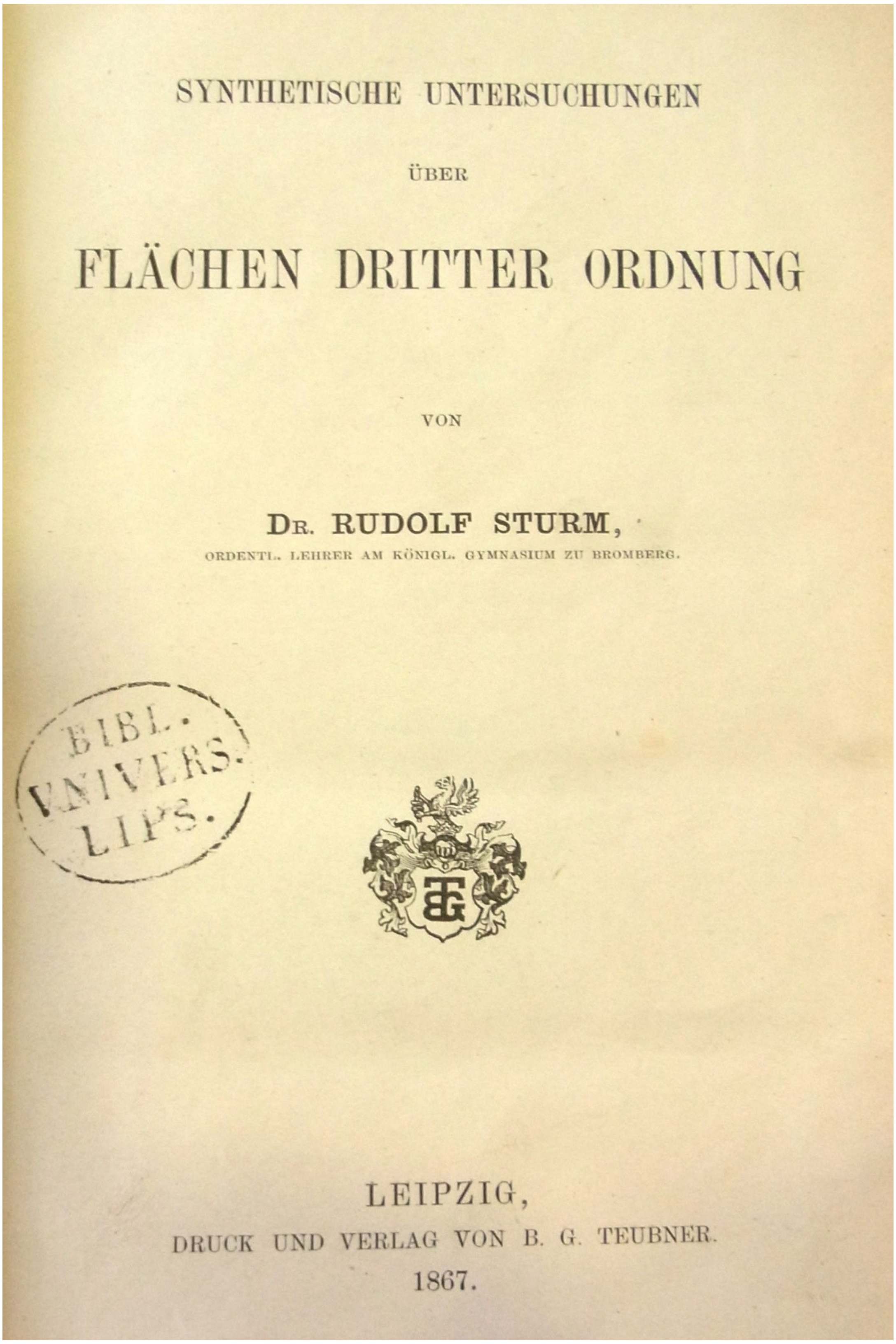
6. ALGEBRAISCHE KURVEN UND FLÄCHEN

Gaspard M o n g e (1746-1818) beschrieb eine Fläche im Raum durch ihre Punkte P = (x,y,z), die einer Gleichung F(x,y,z) = 0 genügen und eine Raumkurve als Schnitt zweier Flächen. Wenn F ein Polynom n-ten Grades ist, so heißt die Fläche algebraische Fläche n-ter Ordnung.
In der synthetischen Geometrie löst man sich von Koordinatensystemen und erklärt die Ordnung einer Fläche durch die Anzahl der Punkte, welche diese mit einer beliebigen Geraden gemein hat, und eine Raumkurve als eine Kurve n-ten Ordnung, wenn eine beliebige Ebene sie in n Punkten schneidet.
Im Januar 1856 wies Steiner auf einer öffentlichen Sitzung der Berliner Akademie darauf hin, dass algebraische Flächen höher als von 2. Ordnung hinsichtlich ihrer charakteristischen geometrischen Eigenschaften noch wenig erforscht sind. Deshalb trug er beispielgebend über seine langjährigen Untersuchungen zu Flächen dritter Ordnung vor, wobei er vier Erzeugungsarten dieser Flächen aufgestellt und damit sowie mit Polaritätssätzen wichtige Flächeneigenschaften gefunden hatte und sie ohne Beweise bekannt gab.[24] Daraufhin veröffentlichte Schröter 1859 eine grundlegende Arbeit über Raumkurven 3. Ordnung. [25]
In diesem Jahr maturierte der Breslauer Rudolf S t u r m (1841-1919) und nahm in seiner Vaterstadt ein 8-semestriges Studium auf, wobei er insbesondere bei Schröter „Analytische Geometrie“ und bei Joachimsthal „Allgemeine Theorie der Flächen und Kurven doppelter Krümmung“ belegte. Von Schröter wurde Sturm angeregt, Flächen 3.Ordnung nach Steiner (1856) synthetisch zu untersuchen. Er promovierte 1863 mit der Dissertation *De superficiebus tertii ordinis disquisitiones syntheticae* und arbeitete anschließend als Lehrer in Bromberg.

Nach Steiners Tod stellte im Juli 1864 Weierstrass eine Aufgabe im Auftrag der Akademie der Wissenschaften zu Berlin für einen Preis aus der Steiner-Stiftung, die gerade das forderte, was Sturm in seiner Graduierungsschrift im Anschluss an Steiners Arbeit (1856) bereits begonnen hatte: „Die Akademie wünscht, dass diese ausgezeichnete Arbeit des großen Geometers nach synthetischer Methode ausgeführt und in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt werde.“ Dazu sollten von Steiner nicht berücksichtigte Fälle (imaginäre Elemente) bearbeitet und verschiedene Raumkurven, in welcher zwei solcher Flächen sich schneiden können, genau charakterisiert werden.
Sturm stellte sich natürlich dieser Aufgabe und lieferte fristgemäß ein Manuskript, das nach der Preisverleihung als Monographie bei B.G. Teubner erschienen ist.[26]
Aber es gab noch einen zweiten Preisträger: Luigi C r e m o n a (1830-1903). Die Jury hatte nämlich entschieden: Beide Arbeiten

> „entsprechen zwar auch den in der Aufgabe gestellten Forderungen nicht so vollkommen, dass einer von ihnen der Preis unbedingt zu erkannt werden müsste; beide aber sind gediegene Leistungen, denen die Akademie ihre Anerkennung ausspricht, indem sie beschliesst, die für den Steiner'schen Preis ausgesetzte Summe von 600 Thalern zu gleichen Theilen unter beide zu theilen.“[27]

[24] J. Steiner: *Ueber die Flächen dritten Grades.* Journal für Mathematik 53(1857), S. 133-141.
[25] H. Schröter: *Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung.* JfM 56(1859), S. 27-43.
[26] R. Sturm: *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.* Leipzig 1867.
[27] *Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wiss. zu Berlin aus dem Jahre 1866.* S. 460-463.



SYNTHETISCHE UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG

VON

DR. RUDOLF STURM,

ORDENTL. LEHRER AM KÖNIGL. GYMNASIUM ZU BROMBERG.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1867.

Abb.5: Sturms bearbeitete Preisschrift.

Während Sturm sich an die geforderte Vervollständigung der Steiner'schen Arbeit gehalten hat, ging Cremona weiter und gründete die Theorie der kubischen Flächen nicht auf die Steiner'schen Erzeugungsarten, sondern auf allgemeine Eigenschaften der Flächen aller Grade. Auf Raumkurven als Flächenschnitte ist er nicht eingegangen. Cremonas Untersuchungen sind 1868 im Journal von

Crelle/Borchard aber auch in deutscher Fassung erschienen, übersetzt von Maximilian Curtze.[28] Cremona wurde über die Stationen Bologna, Mailand, Rom zum Begründer der italienischen Schule der Geometrie, Sturm gelangte über Darmstadt und Münster auf den Breslauer Lehrstuhl seines verstorbenen Lehrers und vollendete die Breslauer Schule der Geometrie, worauf wir noch näher eingehen werden.

7. DER BRESLAUER SEMINARBETRIEB

Die Gymnasiallehrerausbildung in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts umfasste in Breslau häufig mehrere Disziplinen wie etwa Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie und Mineralogie. Das Oberlehrerexamen in einigen Fächern eröffnete den Einsatz in den Schulen. Unter günstigen Umständen konnten Befähigte nach dem Studium auch promovieren. Der Lehrbetrieb an den Universitäten war auf die Lehre an den Schulen ausgerichtet und nicht auf die Forschung in einer Spezialdisziplin.Mit der industriellen Revolution änderten sich die Anforderungen an die Gesellschaft, denn Wissenschaft und Technik benötigten kreatives Personal und damit angewandte Mathematik und Polytechnika.
Der erste Schritt zur Forschung in der Mathematik lag im Einführen von Übungen zu mathematischen Vorlesungen. Derartige Veranstaltungen gab es in Breslau erst in den 40er-Jahren. Insbesondere Kummer kündigte regelmäßig „Mathematische Übungen“ an, da er während seines Studiums bei Scherk in Halle die „Uebungen seiner mathematischen Gesellschaft“ genutzt hatte. Auch Joachimsthal veranstaltete zweimal wöchentlich „Mathematische Übungen“. Schröter übernahm den Übungsbetrieb 1862. Er wollte mit seinen Königsberger Seminar-Erfahrungen aber mehr erreichen, als eine praktische Ergänzung einer Vorlesung. Er strebte ein forschungsorientiertes Seminar an. Über den sich im Laufe der Zeit herausbildenden Breslauer Übungsbetrieb berichtete Otto Toeplitz:

> „Die Seminare schlossen zunächst an den Gegenstand irgendeiner Vorlesung an und begannen mit einfachen, die Grundbegriffe einübenden Aufgaben; allmählich aufsteigend und manchmal durch zwei, drei Semester erstreckt, bildeten sie stetig im Behandeln kleiner Themen, schließlich im eigenen Stellen einfacher Fragen aus; vielfach erwuchsen aus ihnen so in organischer Weise die Staatsexamensarbeiten wie die Dissertationen.“[29]

Bereits 1864 konnte Schröter zusammen mit dem Physiker Frankenheim auch ein sogenanntes mathematisch-physikalisches Seminar eröffnen, dem Mittel zur Anschaffung von Büchern zur Verfügung stand. Ein eigenes Zimmer im Universitätsgebäude wurde ihnen erst 1886 eingerichtet, als Frankenstein in der Leitung durch den Physiker Meyer abgelöst worden war.

8. EINE BEMERKENSWERTE SEMINARARBEIT

Zwischen zwei konzentrische Kreise mit Radien, von denen der eine gleich dem Doppelten des anderen ist, kann man stets ein Dreieck finden, das dem inneren Kreis umschrieben und dem äußeren Kreis einbeschrieben ist.
C.G.J. J a c o b i (1804-1851) fand allgemein eine Relation zwischen dem Abstand a der Mittelpunkte und den Radien r bzw. R zweier Kreise,von denen der eine einem unregelmäßigen Polygon (n-Eck) einbeschrieben, der andere demselben umschrieben ist.[30] Er wurde durch Steiner dazu angeregt, der die Relation für $n = 5, 6$ und 8 ohne Beweis angegeben hatte.[31]
L. E u l e r (1707-1783) kannte schon für das Dreieck ($n=3$) die Beziehung: $R^2-a^2 = 2rR$.

---

28 L. Cremona: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung.* Berlin 1870.

29 O. Toeplitz: *Die geometrische Periode in dem math.Unterricht an der Breslauer Universität,* Abh.50(1919)S.23. Vgl. auch H.-J. Girlich: *Hausdorff/Toeplitz/Steinhaus – drei bedeutende Breslauer Mathematiker.* SRU, Bd.7.

30 J. Jacobi: *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie.* Crelle's Journal 3(1828), S. 376-389.

31 J. Steiner: *Aufgaben und Lehrsätze, 57.Lehrsatz.* Crelle's Journal 2(1827), S. 289.

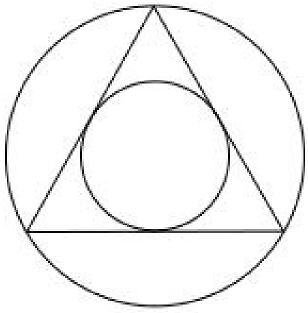


Abb.6: Die Euler'sche Lösung des Einschluß-Problems.

Schröter las im Sommersemester 1862 Differential- und Integralrechnung mit Übungen sowie „Theorie elliptischer Functionen". Im folgenden Semester bot er „Analytische Geometrie des Raumes", „Determinanten" und „Mathematische Übungen" an. Unter seinen Studenten ragten hervor: Jakob R o s a n e s (1842-1922) und Moritz P a s c h (1843-1930), letzterer schrieb:

> „Bei den Übungen, die Schröter im Wintersemester 1862/63 abhielt, legten Rosanes und ich den Grund zu einer Abhandlung, die wir im Sommer 1864 vollendeten. Im März 1865 erschien diese gemeinschaftliche Abhandlung im Journal für Mathematik."[32]

In dieser tiefgründigen „Seminararbeit"[33] haben Rosanes und Pasch das obige Problem von zwei Kreisen auf zwei Kegelschnitte übertragen und eine Beziehung zwischen den Koeffizienten der diese Kegelschnitte bestimmenden Gleichungen und der Seitenzahl eines Polygons gefunden, das dem einen umbeschrieben und dem anderen einbeschrieben ist. Dabei folgten sie Jacobi und nutzten Formeln, die für die Addition elliptischer Integrale erster Gattung gelten. Die Abhandlung war durchweg im Rahmen der analytischen Geometrie gestaltet.
Durch Schröter wurden sie angehalten, in ihrem letzten Breslauer Studienjahr Probleme der projektiven Geometrie zu bearbeiten.Mit den Dissertationen *De polarium reciprocarum theoria observationes* (Rosanes) und *De duarum sectionum conicarum in circulos projectione* (Pasch) wurden beide gemeinsam am 21.8.1865 in der Aula Leopoldina promoviert. Rosanes hatte insbesondere gezeigt, dass zwei Dreiecke auf mehr als eine Art gleichzeitig perspektivisch liegen können.[34]
Im Anschluß verbrachten Rosanes und Pasch ein postgraduales Studienjahr in Berlin, wo sie hauptsächlich Weierstraß' und Kroneckers Vorlesungen besuchten. Nach Breslau zurückgekehrt, griffen sie die Thematik ihrer Seminararbeit nochmals auf, die ebenfalls in der Berliner Dissertation von M.Simon 1867 behandelt wurde, und legten den algebraischen Kern des geometrischen Problems frei.[35] Desweiteren bereiteten sie ihre Habilitation vor. Rosanes untersuchte Bedingungen, unter denen das vollständige Integral einer speziellen Differentialgleichung algebraisch ist.
Er wurde am 30.4.1870 in Breslau habilitiert[36], 1873 hier ao.Professor, 1876 Ordinarius und 1903/1904 Rektor der Breslauer Universität.

---

32 *Moritz Pasch – eine Selbstschilderung.* Gießen 1931, S. 3.

33 J. Rosanes, M. Pasch: *Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem andern einbeschriebene Polygon.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 64(1865), S. 126-165.

34 J. Rosanes: *Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage.* Mathematische Annalen 2(1870), S. 549-552.

35 J. Rosanes, M. Pasch: *Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 70(1869), S. 169-174.

36 J. Rosanes: *Ueber algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung.*Mathem. Annalen 3(1871), S. 535-546.
J. Rosanes: *Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raum.*Breslau 1871.

9. STRAHLENSYSTEME

Pasch blieb bei der Geometrie und wandte sich speziell den Strahlensystemen zu, die durch Kummer in Anschluss an Hamilton in der richtungsweisenden Arbeit *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensyteme* differentialgeometrisch neu begründet worden war.[37] Nach Steiners Tod griff Julius P l ü c k e r (1801-1868) , der bereits 1846 liniengeometrische Gedanken geäußert und nach seiner vorrangig der Physik gewidmeten Forschungsperiode erst 1860 präzisiert hatte, dann in seinem Buch *Neue Geometrie des Raumes - gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*[38] diese Problematik erneut wieder auf und entwickelte darin eine Theorie der Linien-Komplexe ersten Grades und ihrer Kongruenzen sowie der Komplexe zweiten Grades.
Das Raumelement wird durch zwei lineare Gleichungen beschrieben: $x = rz + \rho$ und $y = sz + \sigma$, das ist ein Strahl mit den Parametern r, ρ, s, σ, der durch den Punkt (x,y,z) geht. Die Gesamtheit aller Strahlen, deren Parameter einer homogenen Gleichung n-ten Grades $f(r,\rho,s,\sigma) = 0$ genügen, bilden einen Komplex n-ten Grades, der Schnitt zweier Komplexe eine Kongruenz.
Beim Studium der Plücker'schen Liniengeometrie fand Pasch folgenden Satz:

> „Für jeden Complex ist die Fläche der singulären Punkte mit der der singulären Ebene identisch; die singulären Linien sind Tangenten dieser Fläche in ihrem zugeordneten singulären Punkte und längs ihrer zugeordneten singulären Ebene.“[39]

Diesen Satz hatte Plücker für die Komplexe zweiten Grades bewiesen. Pasch konnte ihn für Komplexe beliebigen Grades bestätigen und ihn als Kern einer Abhandlung zur Erlangung der Habilitation an die Ludewigs-Universität Giessen senden, da er von Schröter erfahren hatte, dass dort – im Gegensatz zu Breslau, wo Rosanes gerade etabliert worden war – ein Privatdozent für Mathematik gesucht wurde.

> Am 24. Oktober 1870 nach Gießen übergesiedelt, erhielt ich am 29. November die Venia legendi für Mathematik und konnte am 5. Dezember Vorlesungen eröffnen.[40]

Pasch forschte weiter auf dem Gebiet der Strahlensysteme und veröffentlichte als Basis der Liniengeometrie *Zur Theorie der linearen Complexe*[41] und im Anschluß an seine Habilitations-schrift *Ueber die Brennflächen der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe.*[42]
Auf Paschs berühmte Untersuchungen zu den Grundlagen der Mathematik werden wir erst später eingehen, vorher sollen nur noch kurz die Arbeiten von Kummer über Strahlungssysteme bis hin zu den Flächen vierter Ordnung skizziert werden.

10. DIE KUMMER'SCHE FLÄCHE

Kummer begann seine Untersuchungen zu Systemen geometrischer Gebilde zu veröffentlichen mit einer Breslauer Arbeit über orthogonale Kurvensysteme[43]. Die Breslauer Dissertationen von Wittiber (1847), Hermes (1849) und Szenic (1855) waren entsprechend ausgerichtet. Die erfolg-reichen Studien zum Großen Fermat'schen Satz und der Wechsel nach Berlin ließ Kummer erst Ende der 50er Jahre zur Geometrie zurückkehren.
Mit der Abhandlung *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme*[44] begründet er eine neue Forschungsrichtung, die Differentialgeometrie der linearen Kongruenzen. Insbesondere nutzt er sie, um algebraische Strahlensysteme entsprechend ihren singulären Punkten zu klassifizieren[45].Dabei

[37] E. Kummer: *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme.* Journal für Mathematik 57(1860), S.189-230.
[38] J. Plücker: *Neue Geometrie des Raumes...* 1.Abtheilung, 1868, 2.Abtheilung(hrsg.F.Klein), 1869, B.G.Teubner.
[39] M. Pasch: *Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden.* Habil.-Schrift, Giessen 1870, S. 9.
[40] *Moritz Pasch – eine Selbstschilderung.* Gießen 1931, S. 4.
[41] M. Pasch: *Zur Theorie der linearen Complexe.* Journal für Mathematik 75 (1872), S. 106-152.
[42] M. Pasch: *Ueber die Brennflächen der Strahlensysteme.* Journal für Mathematik 76 (1873), S.156-169.
[43] E. Kummer: *Über Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig durchschneiden.*J.f.Math.35(1847).
[44] Vgl. Fußnote 37.
[45] E. Kummer: *Über algebraische Strahlensysteme 1. und 2. Ordnung.*Abhandl.d.AdW zu Berlin 1866, S. 1-120.

entdeckte er einen interessanten Flächentyp, der heute noch seinen Namen trägt. Es handelt sich hierbei um Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten, die als Brennflächen gewisser Strahlensysteme aufgefasst werden können. Wir nennen unter diesen Flächen diejenige Kummer'sche Fläche, bei der alle 16 singulären Punkte reell sind. Dafür hat Kummer eine detaillierte analytische und verbale Beschreibung geliefert und ein Drahtmodell zu seinem Akademievortrag vorgeführt.[46]

> „Die Fläche selbst besteht aus 12 gesonderten Theilen, welche unter einander nur mittels der 16 singulären Punkten in Verbindung stehen. Vier von diesen Theilen, welche von einander vollständig getrennt sind, setzen sich mit je drei Punkten an vier andere Teile an,..., sie werden in grösserer Entfernung von dieser Basis immer dicker und erstrecken sich jeder für sich in's Unendliche. Vier andere Theile der Fläche sind endlich und ihre Gestalt kommt der von dreiseitigen Pyramiden nahe,... Jeder der übrigen vier Flächentheile sieht im Ganzen kegelförmig aus, steht mit den übrigen Theilen nur in einem einzigen Punkte in Verbindung, und erstreckt sich von diesem Punkte aus in's Unendliche.“[47]

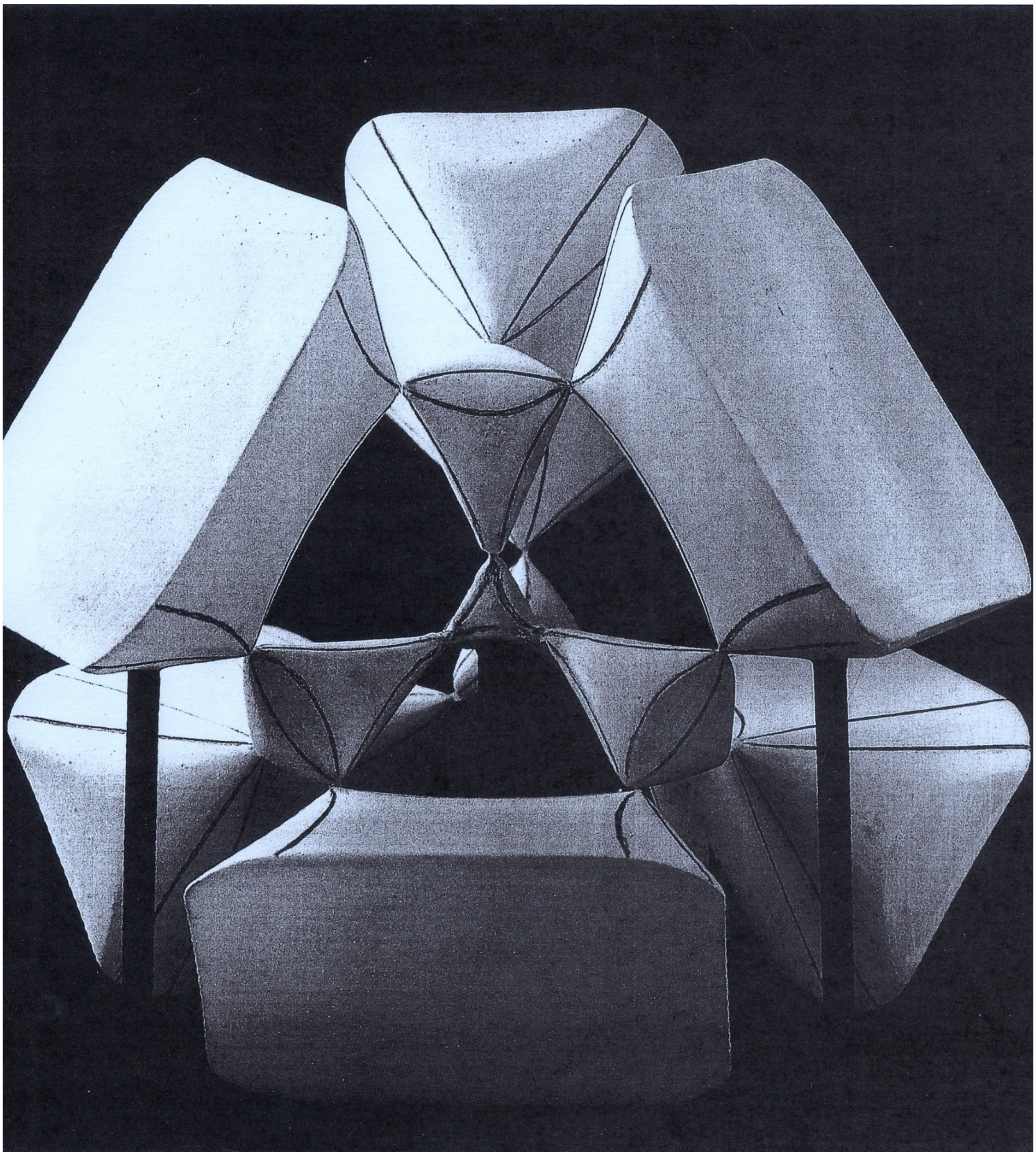


Abb.7: Die Kummer'sche Fläche.

[46] E. Kummer: *Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten.* Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse am 18. April 1864, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften 1864, S. 246-260.

[47] Vgl. Fußnote 46, S.254.

Der Kummersche Flächentyp war fast ein halbes Jahrhundert lang Gegenstand intensiver Untersuchungen europäischer Mathematiker. Begonnen mit Felix Klein und Sophus Lie, die 1869/70 in Kummers Seminar in Berlin arbeiteten und unmittelbar daraus eine Arbeit gewannen.[48] Sie setzten ihre Studien zur Liniengeometrie in München, Leipzig und Christiania mit ihren Schülern fort.[49] Weitere bedeutende Beiträge leisteten Theodor Reye in Strassburg und Corrado Segre in Turin mit synthetischer Methode.[50]
Es ist bemerkenswert, wenn das einzige, allein dem Kummer'schen Flächentyp gewidmete Buch *Kummer's Quartic Surface,* von R.W.H.T. Hudson 1905 veröffentlicht, bei Cambridge University Press 1990 wieder aufgelegt wurde, das Vorwort von Wolf Barth nimmt Bezug zur neueren Forschung, speziell zu den K3-Flächen mit dem nach „K“ummer gewählten „K“.

48 F. Klein und S. Lie: *Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten.* Monatsberichte der AdW zu Berlin, Sitzung vom 15.12.1870, S. 891-899.

49 Vgl. etwa K.Rohn: *Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen p=2.* Dissertation, Universität München 1878.

50 Th. Reye: *Ueber Strahlensysteme zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten.* Journal für Mathematik 86 (1879), S. 84-107.