Über den Ausbau der Wahrscheinlichkeitstheorie durch Beiträge von Hugo Steinhaus (1887-1972) und Norbert Wiener (1894-1964) *

Hans-Joachim Girlich (Leipzig)

David Hilbert (1862-1943) führte in seinem Werk *Grundlagen der Geometrie* 1899 die axiomatische Methode zur Sicherung mathematischer Strenge ein. Ein Jahr später forderte er auf dem 2. Internationalen Mathematiker-Kongress in Paris im Rahmen seines berühmten Vortrages "Mathematische Probleme" die Fachwelt auf, auch die physikalischen Disziplinen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mechanik axiomatisch zu behandeln. Diesem wurde 1933 mit Kolmogoroffs *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* in Springers Reihe „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" entsprochen und damit ohne jegliche heuristische Anleihe eine Basis einer neuen mathematischen Disziplin geschaffen. Diese Entwicklung im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts ist global und im Detail in vielen Arbeiten, so auch in Jan von Platos Buch *Creating Modern Probability* von 1994 beschrieben.

In der vorliegenden Note beschränken wir uns auf das Jahr 1923 und zwei weniger bekannte Arbeiten, in denen der Übergang von der gleichsam physikalischen zur streng mathematischen Betrachtung in gewissen Spezialfällen schon vollzogen wurde. So präzisierte Steinhaus den Begriff einer speziellen Folge unabhängiger Zufallsgrößen, anknüpfend an E.Borel (1909) und U.Broggi (1907). Wiener behandelte einen speziellen stochastischen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen. Das gelingt durch Auszeichnung zweier Wahrscheinlichkeitsfelder (in der Kolmogoroff'schen Terminologie), den Lebesgue'schen bzw. den Wiener'schen Wahrscheinlichkeitsraum, die wir hier wohl motiviert einführen können. Zur gleichen Zeit veröffentlichte A. Łomnicki eine Arbeit, in der Bausteine zu Kolmogoroffs Modell der Wahrscheinlichkeit bereits geliefert wurden, zehn Jahre vor dem Erscheinen der *Grundbegriffe.*

*Revidierte Fassung eines Beitrages zur DMV/GDM-Tagung zur Geschichte der Mathematik in Hamburg/Seevetal, vorgetragen am 14.5.2015.

Str.

Abbildung 1. Inhaltsverzeichnis von Band IV der Fundamenta Mathematicae

1. FUNDAMENTA MATHEMATICAE

Den Professoren der Warschauer Universität Wacław Sierpiński (1882-1969), Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) und Zygmunt Janiszewski (1888-1920) gelang es während der schwierigen Jahre der Wiederentstehung eines unabhängigen polnischen Staates eine neue mathematische Zeitschrift für die Mengenlehre und deren Anwendungen wie Maß- und Integrationstheorie sowie Topologie zu gründen und zu etablieren. Im ersten Band von 1920 publizierten nur polnische Autoren, darunter auch Steinhaus, dessen topologischer Satz heute noch in den Lehrbüchern steht [1]. Als Beweis alsbaldiger internationalen Aufnahme erscheint das Inhaltsverzeichnis des IV. Bandes (vgl**. Abb.1**) wie ein Who'sWho einer aufstrebenden Mathematikergeneration, die für die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel im Laufe der Zeit bereitstellte. Das waren neben den Sierpiński-Schülern C. Kuratowski(1896-1980), S. Saks (1897-1942) und A. Zygmund (1900-1992), die Lemberger Professoren Steinhaus, A. Łomnicki (1881-1941) und S. Banach (1892-1945), die wir im nächsten Kapitel vorstellen werden. Dazu kamen hier die Moskauer Lusin-Schüler D. Menchoff (1892-1988), A. Khintchine (1894-1959), P.Urysohn (1898-1924) und A.Kolmogoroff (1903-1987). Aus den USA hatten der Topologe R.L. Moore (1882-1974) und N.Wiener diese wichtige Quelle der Kommunikation entdeckt. Auf letzteren werden wir im zweiten Teil unserer Note zurückkommen.

Last not least sei hier besonders Maurice Frechet (1878-1973) hervorgehoben, der bereits 1915 begonnen hatte, die Lebesguesche Maß- und Integrationstheorie von ihren geometrischen Elementen zu befreien und in einer Vorlesung an der Straßburger Universität 1921/1922 weiter auszuarbeiten. Das zugehörige von seinem Schüler R.Franck redigierte Manuskript wurde in den Bänden 4 und 5 der *Fundamenta Mathematicae* abgedruckt und bildete für Kolmogoroff eine Basis für die *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

[1]Bauer 2001, S. 163, Brokate 2011, S. 68.

2. Steinhaus in Lemberg

Hugo Steinhaus wurde 1887 als Sohn eines Kaufmanns in Jasło (Galizien) geboren. Nach dem Schulbesuch in seiner Vaterstadt bezog er im Oktober 1905 die Universität in Lemberg und studierte dort zwei Semester lang Philosophie und Physik, sowie Mathematik bei Julian Puzyna (1843-1918), der von Lazarus Fuchs (1833-1902) in Berlin ausgebildet worden war. Beide stammten aus dem Großherzogtum Posen, Puzyna dazu aus dem Hochadel[2].Steinhaus setzte sein Studium im Ausland fort, wo er in München zwei Semester bei Pringsheim und Sommerfeld sowie zehn Semester in Göttingen u.a. bei Carathéodory, Herglotz, Hilbert, Klein und Schwarzschild Vorlesungen gehört hatte. Steinhaus promovierte 1911 summa cum laude bei Hilbert mit *Neue Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips*. Danach arbeitete er im Seminar von Otto Toeplitz, woraus 1912 seine erste Veröffentlichung in den Mathematischen Annalen über den Konvergenzbegriff hervorging. Während des Weltkrieges war Steinhaus vor allem in Jasło und Krakau eingesetzt, konnte sich aber im März 1917 mit einer Arbeit über Fourier-Reihen an der Lemberger Universität habilitieren. Dabei unterstützte ihn sein alter Lehrer Puzyna, um ihn als Dozent zu gewinnen. Diese Tätigkeit übte er nur ein Jahr lang aus. Wegen des polnisch-russischen Krieges ging er wieder nach Jasło und kehrte erst 1920 mit der Berufung zum außerordentlichen Professor nach Lemberg zurück. 1923 wurde Steinhaus Ordinarius an der Jan- Kazimierz-Universität in Lemberg.[3]

[2]Sein Vater und ein Bruder führten den Titel „Fürst Puzyna von Kozielsko".

[3]Steinhaus 2010, Band I.

Abbildung 2. Hugo Steinhaus (1887-1972)
Portrait-Foto aus HUGO STEINHAUS*: Selected Papers,* Warszawa 1985.

Stefan Banach (1892-1945) hatte 1910 ein Ingenieurstudium am Lemberger Polytechnikum aufgenommen, musste es aber im Weltkrieg abbrechen. Steinhaus traf ihn zufällig 1916 in Krakau , daraus wurde alsbald eine enge Zusammenarbeit, die zur ersten gemeinsamen Veröffentlichung über Fourier-Reihen führte.[4] 1920 wieder in Lemberg verhalf Steinhaus Banach zu einer

[4]Banach/Steinhaus 1919.

Assistentenstelle am Polytechnikum. Bereits im Juni diesen Jahres reichte er seine Dissertation *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales* bei der Lemberger Universität ein. Diese Arbeit wurde in Band 3 der *Fundamenta Mathematicae abgedruckt.* Im Band 4 behandelte Banach ein von F. Hausdorff gestelltes Maßproblem und zeigte die Existenz bewegungsinvarianter endlich additiver Maße sowie die Nichtexistenz σ-additiver auf der Potenzmenge euklidischer Räume der Dimension 1 und 2. Wenn man also, wie bei Reihen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf σ-Additivität nicht verzichten kann, dann muss man sich auf gewisse Mengensysteme, das heißt, auf gewisse Untermengen der Potenzmenge beschränken.
Banach habilitierte sich im April 1922 und wurde drei Monate später Extraordinarius und 1927 Ordinarius an der Jan-Kasimir-Universität. Banachs Forschungen zur Theorie der linearen Operatoren erbrachte die Möglichkeit, eine neue mathematische Zeitschrift zu gründen, die *Studia Mathematica,* die Steinhaus zusammen mit Banach ab 1929 herausgaben. Die Lemberger Forschungsergebnisse erfuhren weltweite Verbreitung durch drei hervorragende Monographien: Banachs *Théorie des opérations lineaires* sowie Kaczmarz und Steinhaus' *Theorie der Orthogonalreihen* von der Universität und Kuratowskis *Topologie I+II (Espaces metrisables, Espaces complets)* vom Polytechnikum,

Anton Łomnicki (1881-1941) hatte von 1899-1903 an der Lemberger Universität bei Puzyna und Smoluchowski studiert und danach als Gymnasiallehrer gearbeitet. Diese Tätigkeit erlaubte ihn ein postgraduales einjähriges Studium (1906/1907) in Göttingen und 1919 die Habilitation verbunden mit einer Dozentur am Lemberger Polytechnikum.1920 wurde er dort zum außerordentlichen und 1921 zum ordentlichen Professor ernannt. Banach war von 1920 bis 1921 sein Assistent, der anfangs für einige Monate in Łomnickis häuslichem Arbeitszimmer schlief.[5]

[5] Kaluza 1996, S. 30.

3. Lemberger Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeit

Marian von Smoluchowski (1872-1917) arbeitete als Professor der theoretischen Physik von 1900 bis 1913 an der Lemberger Universität, danach als Ordinarius der Experimentalphysik an der Krakauer Universität, an der er als Rektor im September 1917 starb. Bereits im Dezember verfasste Albert Einstein (1879-1955) einen Nachruf für die Wochenzeitschrift *Die Naturwissenschaften,* in der anschließend auch Beiträge aus Smoluchowskis Nachlaß veröffentlicht wurden. Darunter war die Arbeit *Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze der Physik,* in der er eine exakte Basis der Wahrscheinlichkeitsrechnung forderte. Diesen Appell seines gerade an der Ruhr verstorbenen Lehrers veranlasste wohl **Łomnicki** zu seiner Studie *Nouveaux fondements du calcul des probabilités.(Définition de la probabilité fondée sur la théorie des ensembles),* die er am 19.11.1920 abschließt. Dabei geht er von dem bekannten Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff aus, den er sukzessive vom endlichen, über den abzählbaren zum nichtabzählbaren Grundraum mengentheoretisch erweitert. Er spezifizierte die Bestimmungsstücke der Wahrscheinlichkeit wie folgt:

1) Die Menge $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_b\}$ der möglichen Fälle, in der die Wahrscheinlichkeit zu prüfen ist (die Elementarereignisse).

2) Die Menge m der für das betrachtete Ereignis günstigen Fälle, von der die Wahrscheinlichkeit in M zu prüfen ist.

3) Die Funktion g (die Verteilung der Gewichte), die jedem Element e von M eine Zahl g(e) zuordnet, den Grad der „Möglichkeit" des Falles e.

4) Die Art der Maßbestimmung

Bei endlichen Mengen mit $|m| = a$, $|M| = b$ definiert Łomnicki die Wahrscheinlichkeit $p_M(m) = \dfrac{g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_a}}{g_1 + g_2 + \cdots + g_b}$,wobei $g_k = g(e_k)$, $k = 1,2,\ldots,b$.

Sind die Gewichte alle gleich $g_i = g_j$ für $i \neq j$ (homogen), folgt die Laplacesche Maßbestimmung

$$p_M(m) = \frac{a}{b}.$$

Auch für die gewichtete Maßbestimmung gilt $p_M(M)=1$, $p_M(\varnothing)=0$ sowie der Additionssatz. Als wichtigste Aussage formuliert er ein Theorem, das Bedingungen angibt, wann unter Gewichten ein Multiplikationssatz gilt.

Wenn die Menge M abzählbar ist: $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, so bildet er Teilmengen $M_1 = \{e_1\}$, $M_2 = \{e_1, e_2\}, \ldots, M_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ und zur Menge m bezüglich M die Durchschnitte $m_n = m \cap M_n$. Damit definiert er die Wahrscheinlichkeit $p_M(m) = \lim_{n\to\infty} p_M(m_n)$.

Bei einer homogenen Gewichtsverteilung: $g_i = 1$ *für alle* i, ergibt sich

$$p_M(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n), \text{ wobei } c_i = \begin{cases} 1, \mathit{für}\ e_i \in m \\ 0, \mathit{für}\ e_i \notin m \end{cases}.$$

Nur wenn zu vorgegebenem m diese Folgen konvergieren, kann von einer Wahrscheinlichkeit von m gesprochen werden.

Schließlich wird bei einer überabzählbaren Punktmenge M im euklidischen Raum ein Maß μ als Lebesgue-Integral über g definiert und damit die Wahrscheinlichkeit $p_M(m)$ als Quotient von μ(m) und μ(M) erklärt, wie es im Falle einer homogenen Gewichtsverteilung (g=1) bereits bei Hausdorff in *Grundzüge der Mengenlehre* von 1914 (S. 416/417) zu finden ist.

Lomnicki brachte sein Fundament der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohl mit dem Mengenbegriff in Verbindung, war aber in erster Linie an einem konstruktiven Wahrscheinlichkeitsbegriff interessiert und nicht wie Ugo Broggi an den Axiomen der Wahrscheinlichkeit. Er wollte den in den beiden Bänden *Wahrscheinlichkeitsrechnung* [6] von Emanuel Czuber (1851-1925) gesammelten Fundus eine Basis

[6] Czuber 1910 und Czuber 1914.

geben, wobei er sich bei der Gewichtsverteilung an den Dichten in Markoffs Lehrbuch[7] orientierte.

Wacław Sierpiński, der Nestor der polnischen Mathematiker-Schule, wurde 1910 Professor an der Lemberger Universität und lehrte dort bis 1914. Infolge der Einnahme von Lemberg durch die zaristisch-russischen Truppen wurde er interniert, konnte aber alsbald in Moskau mit Lusin wissenschaftlich zusammenarbeiten.1917entstand die für Steinhaus wichtige Sierpińskische Arbeit *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre.* Im Februar 1918 kehrte Sierpiński nach Lemberg zurück und befasste sich mit der axiomatischen Definition Lebesgue-meßbarer Mengen und des Lebesgue-Maßes[8] ,die als Grundlage für die entsprechende Definition der Wahrscheinlichkeit dienen kann. Es bezeichne $L[0,1]$ die Menge der Lebesgue-meßbarenTeilmengen des Intervalls $[0,1]$, dann folgt nach Sierpiński:

Das Lebesgue-Maß λ ist eine 1-normierte, σ-additive Mengen-funktion auf der von den Intervallen erzeugten σ-Algebra $L[0,1]$.
Wir nennen heute das Tripel ($[0,1]$, $L[0,1]$, λ) Lebesgueschen Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Grundraum $[0,1]$, der Gesamtheit der Ereignisse $E \in L[0,1]$ und der Wahrscheinlichkeit $p_{[0,1]}(E) = \lambda(E)$.
Diese Konstruktion nutzte erstmalig Steinhaus, um die unendliche Münzwurf-Folge mathematisch strenger fassen zu können.

4. Les probabilités dénombrables

Die klassischen Untersuchungen von Versuchsfolgen bezogen sich stets auf endliche Folgen und deren asymptotischen Verhaltens. Im Jahr 1909 erschien Émile Borels (1871-1956) wegweisende Arbeit

[7]Markoff 1912, S.155-160.

[8]Sierpiński 1918.

Les probabilités dénombrables et leur applications arithmétiques. Darin wurden erstmalig unendliche Versuchsfolgen studiert. Borel fasste die dyadische Entwicklung einer Zahl aus dem Einheitsintervall als Realisierung einer alternativen Versuchsfolge auf und versuchte zu beweisen, dass der Quotient der Häufigkeiten der beiden Ziffern gegen 1 mit Wahrscheinlichkeit 1 strebt. Felix Hausdorff(1868-1942) bewies den Satz von Borel auf mengentheoretischer Basis, danach interpretierte er diesen, selbst verwundert, als ein starkes Gesetz der großen Zahlen[9].

Das „*Borelsche Paradoxon"* nahm nun Steinhaus zum Anlass, den Widerspruch in einem axiomatisch gefassten Modell aufzulösen. In der Arbeit *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*[10] betrachtet er wie Borel Folgen von Alternativ-Versuchen, wobei er als Grundannahme die Darstellung einer 0-1-Folge als Punkt im Einheitsintervall trifft. Interessante Mengen von 0-1-Folgen wie die, deren ersten n Ziffern vorgegeben sind, lassen sich dann als Vereinigungen von Intervallen darstellen. Damit kommt ihnen im Lebesgueschen Wahrscheinlichkeitsraum auch eine wohl bestimmte Wahrscheinlichkeit zu.

Auf dieser Basis untersucht er das Konvergenzverhalten einer zufälligen Reihe, dessen allgemeines Glied die Form $\pm c_n$ besitzt. Der Zufall steckt in der Gewinnung des Vorzeichens, erzeugt durch eine Folge zufälliger Ziehungen mit Zurücklegen von Kugeln aus einer Urne, die ebenso viele Kugeln, gekennzeichnet mit dem Pluszeichen, wie Kugeln mit dem Minuszeichen enthält. Jeder realisierten Vorzeichenfolge lässt sich eine 0-1-Folge zuordnen. Betrachten wir für $x \in [0,1]$ die Dualbruchdarstellung $x=x_1x_2\ldots x_n\ldots$, wobei $x_n=x_n(x)\in\{0,1\}$, so entspricht der 0-1-Folge der x_n die Vorzeichenfolge der $f_n(x) = 1- 2x_n = (-1)^k$ für $k/2^n \leq x < (k+1)/2^n$, $k=0,1,\ldots,2^n-1$. Die Funktionen $f_n(x)$ auf [0,1] sind orthonormal, das heißt : das Integral

---

[9]Hausdorff 1914, S. 419; Girlich 1996, S.54f. (hier ist Laplace durch Lebesgue zu ersetzen).

[10]Steinhaus 1923, S. 289.

über $f_k(x)f_l(x)$ ist gleich 1 für k=l, sonst gleich 0. Damit folgt das

Resultat $$\sum_1^\infty \pm c_n = \sum_1^\infty c_n f_n(x) .$$

Die merkwürdige zufällige Vorzeichenreihe hat Steinhaus zu einer Summe von Zufallsgrößen c_n f_n auf dem Grundraum [0,1] des Lebesgueschen Wahrscheinlichkeitsraumes umgeformt und das Konvergenzproblem auf ein bereits durch Rademacher[11] behandeltes zurückgeführt:

Wenn $\sum c_n^2$ konvergiert, so konvergiert $\sum c_n f_n(x)$ fast überall auf [0,1].

Folgerung*: Wenn $c_n = 1/n$, so konvergiert die zufällige Vorzeichenreihe mit Wahrscheinlichkeit 1.*

Steinhaus Verdienst an der Wahrscheinlichkeitstheorie liegt vor allem darin, an einem Spezialfall gezeigt zu haben, wie man Folgen von unendlich vielen Zufallsgrößen als messbare Funktionen auf einem Maßraum definiert. Er war damit richtungsweisend sowohl für die russische Schule um Alexander Khintchine (1894-1959)[12] als auch für die amerikanische um Norbert Wiener.[13]

5. Wiener in Cambridge, Mass.

Norbert Wiener wurde am 26. November 1894 in Columbia (Missouri) geboren. Sein Vater Leo Wiener stammte aus Weißrussland und kam (ausgebildet in Warschau und Berlin-Charlottenburg)1880 in die USA, wo er 1893, als Professor für moderne Sprachen in Columbia, Bertha Kahn heiratete. Allerdings verlor er alsbald seinen Lehrstuhl und ging nach Boston, wo er schließlich an der Harvard-Universität eine Dozentur und später eine Professur für slawische Sprachen erhielt. Norberts Kindheit und Jugend wurde durch New England geprägt.

---

[11]Rademacher 1922, S. 135.

[12]Khintchine und Kolmogoroff 1925, § 1; Girlich 2012, S. 77-86.

[13]Wiener 1923, S. 87; Paley, Wiener, Zygmund 1933, S. 647f.

Hier erwarb er 14jährig den Bachelor im Fach Mathematik und 1913 den Doktorgrad von Harvard auf dem Gebiet der mathematischen Logik. Nach postgradualen Studien in Europa (bei Bertrand Russell und G. H. Hardy an der Cambridge-Universität und bei Edmund Landau und Hilbert in Göttingen) sowie erste Lehrtätigkeit in Harvard wurde er 1919 von dem Massachusetts Institute of Technology (MIT) in Cambridge aufgenommen, zunächst als Instruktor, erst 1924, 1929, 1932 als Professor (in den aufsteigenden Stufen).[14]

Abbildung 3. Norbert Wiener (1894-1964)
Portrait-Foto aus NORBERT WIENER: *Collected Works I,* MIT 1976.

[14]Wiener 1965, Masani 1990.

6. Der Folgenraum

Als Wiener in Band IV der *Fundamenta Mathematicae* den Artikel von Steinhaus gelesen hatte, schrieb er an Sierpiński, er habe dasselbe Null-Eins-Gesetz unter Verwendung des Daniell-Integrals erhalten. Der mitgelieferte Beweis wurde unverzüglich veröffentlicht [15]. Dazu ging Wiener vom Raum der Vorzeichenfolgen $\alpha \in \{+,-\}^N$ aus und betrachtete zunächst beschränkte Funktionen $\varphi = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, die nur von den ersten n Vorzeichen abhängen. Dafür lässt sich leicht ein Mittelwert bilden: $I(\varphi) = 2^{-n} \sum\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, über $\alpha_j \in \{+,-\}$ für $j = 1,\dots,n$. Das Funktional I hat offenbar bis auf die 0-Stetigkeit, die Wiener dann auch zeigte, die vier Eigenschaften, die nach Daniell [16] zur Erweiterung des Funktionals auf beschränkte Funktionen des Folgenraumes erforderlich sind. Mit dem Daniell-Integral über Indikatorfunktionen lässt sich ein Maß erklären und damit ein neuer Wahrscheinlichkeitsraum gewinnen.

Angeregt durch eine Arbeit von Kolmogoroff, in der die Unabhängigkeit einer Folge von Zufallsgrößen durch das Produktmaß auf einem Folgenraum erfasst wird, übernimmt Steinhaus diese Methode, um das Konvergenzverhalten weiterer zufälliger Reihen zu studieren und in seinem Seminar im Mai 1932 die Maßtheorie in Produkträumen ausarbeiten zu lassen [17]. Andererseits versuchte er auf andere Weise das Unabhängigkeitsproblem zu bewältigen und mit seinem Schüler Mark Kac eine zehnteilige Publikation „*Sur le fonctions indépendantes*“ zu schaffen, die ein andersartiges Bild der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwirft. Im Lebesgueschen Wahrscheinlichkeitsraum sind die Definitionen der Unabhängigkeit von Kolmogoroff und Steinhaus äquivalent [18].

[15] Wiener 1923, S.89f.

[16] Daniell 1919, S. 203.

[17] Steinhaus 1930, S. 23f.; Łomnitzki/Ulam 1934, S. 237.

[18] Kac/Steinhaus 1936-1953, Hartman 1947 S. 21.

7. Die Brownsche Bewegung

Robert Brown (1773-1858) war ein englischer Botaniker, der speziell die Befruchtung von Pflanzen und dabei die Struktur des Pollens untersuchte. Um die wesentlichen Pollenpartikel hinsichtlich Gestalt und Größe zu erfassen, pulverisierte er den Pollen und suspendierte den Staub in Wasser. Unter dem Mikroskop stellte er eine lebhafte Bewegung der Partikel bei vielen Pflanzenfamilien aber auch bei feinem Steinkohlenstaub fest, so dass er eine biologische Erklärung für diese (Brownsche) Bewegung ausschloss.[19] Erst 40 Jahre nach Brown wird als Ursache für die Bewegung die Zusammenstöße der Partikel mit den Flüssigkeitsmolekülen erkannt und nach weiteren 10 Jahren der Einfluss der Zähigkeit der Flüssigkeit auf die Bewegung festgestellt.

Albert Einstein (1879-1955) und Smoluchowski entwickelten 1905 und 1906 erste quantitative Modelle für die Brownsche Bewegung. Die Originalarbeiten sind in Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften Nr.199 (1922) und Nr. 207 (1923) abgedruckt. **Jean-Baptiste Perrin** (1870-1942) hat mit seinen experimentellen Prüfungen diese theoretischen Untersuchungen bestätigt und damit *„Die Beweise für die wahre Existenz der Moleküle"* erbracht. Darüber hinaus hat er in seinem Buch *Die Atome* herausgestellt :

„Einstein und Smoluchowski haben nun die wahre Geschwindigkeit, die nicht messbar ist, ganz beiseite gelassen, haben sich auch um den unendlich verwickelten Weg, den ein Teilchen während einer gegebenen Zeit beschreibt, nicht gekümmert, sondern haben als charakteristische Größe der Bewegung die gerade Verbindungslinie gewählt, welche den Ausgangs- und Endpunkt der Bahn verbindet".

Weiterführend hat Perrin noch ausgeführt :

„Man kann ebenso wenig, nicht einmal annähernd, eine Tangente an irgendeinem Punkte der Bahn anlegen. Das ist ein Fall, wo es

---

[19] Brown 1828, S. 302.

wirklich natürlich ist, an stetige Funktionen ohne Differentialquotienten zu denken“ [20].

Diesen Hinweis hat Wiener als Aufgabe gesehen, hierzu ein mathematisches Pfad-Modell der Brownschen Bewegung zu schaffen.

8. DIFFERENTIAL-SPACE

Der Bahn eines Partikels in Brownscher Bewegung entspricht in der Realität eine Raumkurve. Zur Vereinfachung beschränkt sich Wiener auf eine Komponente und beschreibt deren Pfad f auf der Geraden[21]. Als Grundraum wählt er den Raum $C_o[0,1]$ der stetigen Funktionen f auf dem Intervall [0,1] mit f(0) = 0. Wieners Problem zur Lösung der Perrin’schen Aufgabe bestand darin, ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ in den Funktionenraum $C = C_o[0,1]$ einzuführen, so dass die Teilmenge der nicht-differenzierbaren Pfade das Maß 1 erhält.
Wiener verwendet dazu zwei Eigenschaften der Verschiebung eines Teilchens aus dem Einstein-Modell:

a) *„die Bewegung eines Teilchens in verschiedenen Zeitintervallen werden als voneinander unabhängig aufzufassen sein“* [22],
b) die Verschiebung $f(t_1) - f(t_o)$ eines Teilchens ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und einer Varianz proportional zu $t_1 - t_o$, wobei $t_o < t_1$.

Für die Teilmenge $\{ f \epsilon C : a_i < f(i/n) - f((i-1)/n) < b_i ,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ lässt sich zu a) und b) ein Maß μ_n ermitteln, das nach Lévy[23] ein sphärisches Maß ist und dessen Limes nach Wiener den Differentialraum bestimmt. Diese heuristische Betrachtung hebt er in

[20] Perrin 1914, S. 102.

[21] Wiener 1923, S. 135.

[22] Einstein 1905, S. 556.

[23] Lévy 1922, S. 261-275.

§ 10 auf, indem er einsetzt den Daniell'schen Erweiterungssatz (analog zu unserem Abschnitt 6). Mit der Hölder-Stetigkeit zum Exponenten ß lässt sich die Perrin'sche Aufgabe lösen durch folgenden Wiener'schen Satz:

> *Im Differentialraum gilt für fast alle Funktionen f wohl die Hölder – Stetigkeit mit ß < 0,5 aber nicht für ß > 0,5.*

Also sind im Differentialraum fast alle Funktionen nicht-differenzierbar (einen strengen Beweis gaben Paley, Wiener und Zygmund 1933).

Funktionen im Differentialraum lassen sich darstellen durch die Reihe

$f(t) \sim t\, a_o + a_1\, 2^{½} \sin \pi\, t + \dots + a_n\, 2^{½} \sin n\pi\, t \,/\, n\pi + \dots,$ wobei die

Größen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ unabhängige identisch normalverteilte Zufallsgrößen sind. Diese Fourier-Wiener-Reihe begründete Wiener in der Arbeit *Un problème de probabilités dénombrables* (Bull.Soc.Math. France 11(1924), S.569-578). Damit kam er vom Daniell-Integral mittels Transformationen wieder zum bewährten Lebesgue-Maß.

Der Differentialraum, heute in moderner Fassung Wiener-Raum genannt, ist der Wahrscheinlichkeitsraum der Brownschen Bewegung, die auch als Wiener-Prozess bezeichnet wird und den Ausgangsprozess der Theorie stochastischen Prozesse in stetiger Zeit charakterisiert. Louis Bachelier (1870-1946) hatte bereits 1900 in seiner Dissertation über Börsenkurse derartige Prozesse studiert. Die strenge mathematische Fassung mittels eines Maßes in einem Funktionenraum war aber erst Norbert Wiener vorbehalten.

9. Literatur

BACHELIER, LOUIS: Théorie de la spéculation. In:*Annales de l'Ecole Normale.* Serie 3, Tome XVII, Janvier 1900 (Dissertation, Referent: H. Poincaré).

BANACH, STEFAN ET HUGO STEINHAUS: Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier. In: *Hugo Steinhaus Selected Papers*, Warszawa: PWN 1985, S. 215 - 222 (polnisches Original in Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie A 1918).

BAUER, HEINZ: *Measure and Integration Theory,* Berlin: de Gruyter 2001.

BOREL, EMIL: Les probabilités dénombrables et leur applications arithmétiques. In: *Rendiconti Circ.,mat. Palermo* 27(1909), S. 247-271.

BROGGI, UGO*: Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Göttingen: Dissertation (Referent D.Hilbert) 1907.

BROKATE, MARTIN UND GÖTZ KERSTING*: Maß und Integral*. Basel: Birkhäuser 2011.

BROWN, ROBERT: Mikroskopische Beobachtungen über die in Pollen der Pflanzen enthaltenen Partikel, und das allgemeine Vorkommen activer Moleküle in organischen und anorganischen Körpern. In: *Annalen der Physik und Chemie* 14 (1828), S. 294-313.

CZUBER, EMANUEL*: Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Leipzig:Teubner 1914 (Band.I), 1921 (Band II), jeweils 3.Auflage.

DANIELL, PERCY: A general form of integral. In: *Annals of Mathematics* 19(1918), S. 279-294; 20(1919), S. 281-288; 21(1920), S. 203-220.

EINSTEIN, ALBERT: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: *Annalen der Physik* 4. Folge, 17(1905), S. 549-560.

GIRLICH, HANS-JOACHIM: Hausdorffs Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie. In: *Egbert Brieskorn* (Hrsg.) *Felix Hausdorff zum Gedächtnis.* Braunschweig und Wiesbaden: Vieweg 1996, S. 31-70.

GIRLICH, HANS-JOACHIM: Alexander Khintchine (1894-1959). In*: Zeitläufte der Mathematik* hrsg. H.Fischer/S.Derschauer, *Algorismus* 77(2012), S. 77-86.

HARTMANN, STANISLAW: Sur deux notions de fonctions indépendantes. In: *Colloquium Mathematicum* 1(1948), S. 19-22.

HAUSDORFF, FELIX: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: Veit & Comp. 1914.

KAC, MARK UND HUGO STEINHAUS: Sur le fonctions indépendantes. In: *Studia Mathematica* 6(1936), S.46-58 [I], S.59-66 [II], S.89-97 [III] ; 7(1938), S.1-15 [IV], S.96-100 [V] ; 9(1940), S.121-131 [VI] ;10(1948), S.1-20 [VII] ; 11(1949), S.133-144 [VIII] ; 12(1951), S.102-107 [IX] ; 13(1953), S. 1-17 [X].

KALUZA, ROMAN: *The Life of Stefan Banach.* Basel: Birkhäuser 1996.

KHINTCHINE, ALEXANDER UND ANDREJ KOLMOGOROFF: Ueber Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. In: *Matemat. Sbornik* 32(1925), S. 668-677.

KOLMOGOROFF, ANDREJ: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin: Springer 1933.

LÉVY, PAUL: *Leçons d'Analyse fonctionnelle.* Paris: Gauthier-Villars 1922.

ŁOMNICKI, ANTON: Nouveaux fondements du calcul des probabiltés. In: *Fundamenta Mathematicae* 4(1923), S. 34-71.

ŁOMNICKI, ZBIGNIEW ET STANISLAW ULAM: Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilities. In: *Fundamenta Mathematicae* 23(1934), S. 237-278.

MARKOFF, ANDREJ: *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Leipzig: Teubner 1912.

MASANI, PESI: *Norbert Wiener 1894-1964.* Basel: Birkhäuser 1990.

PALEY, RAYMOND, NORBERT WIENER, ANTON ZYGMUND: Notes on random functions. In: *Mathematische Zeitschrift* 37(1933), S. 647-668.

PERRIN, JEAN: *Die Atome.* Dresden und Leipzig: Steinkopf 1914.

PLATO, JAN VON: *Creating Modern Probability.* Cambridge: University Press 1994.

RADEMACHER, HANS: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. In: *Mathematische Annalen* 87(1922), S. 112-138.

SIERPINSKI, WACLAW: Sur une définition axiomatique des ensembles mesurables. In: *Bulletin Intern. Académie des Sciences Cracovie A* (1918), S.173-178.

STEINHAUS, HUGO: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. In: *Fundamenta Mathematicae* 4(1923), S. 286-310.

STEINHAUS, HUGO: Sur la probabilité de la convergence de series. In: *Studia Mathematica* 2(1930), S. 21-39.

STEINHAUS, HUGO: *Erinnerungen und Aufzeichnungen I, II.* Dresden: Neisse Verlag 2010.

WIENER, NORBERT: Differential-Space. In: *Journal of Mathematics and Physics* 2(1923), S. 131-174.

WIENER, NORBERT: Note on the series $\sum(\pm 1/n)$. In: *Bulletin de l'Académie des Sciences de Pologne.* Série A, 13(1923), S. 87-90.

WIENER, NORBERT: *Mathematik – mein Leben.* Frankfurt am Main: Fischer 1965.